從信號與系統到控制

單元：拉普拉斯轉換-1

從 傅立葉轉換 到 拉普拉斯轉換

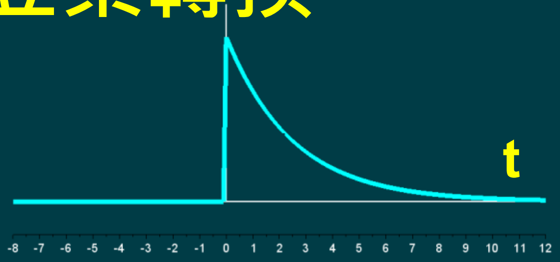
授課老師：連　豐　力

單元學習目標與大綱

- 複習 - 連續時間 收斂信號 之 傅立葉轉換
- - 連續時間 發散信號 之 傅立葉轉換
- 推演 - 如何找到 發散信號 之 代表性轉換
- 猜想 - 改變 發散信號 的特性，再進行傅立葉轉換

收斂指數函數 的 傅立葉轉換

$$x(t) = e^{-2t}\,u(t)$$



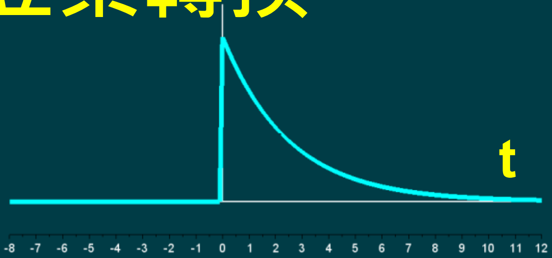
$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{x(t)}\, e^{-jwt}\, dt$$

$$= \int_{\boxed{-\infty}}^{\infty} e^{-2t}\, \boxed{u(t)}\, e^{-jwt}\, dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{\boxed{-2t}}\; e^{\boxed{-jwt}}\, dt \;=\; \int_{0}^{\infty} e^{-(2+jw)t}\, dt$$

收斂指數函數 的 傅立葉轉換

$$x(t) = e^{-2t}\,u(t)$$



$$X(jw) = \int_0^{\infty} \boxed{e^{-(2+jw)t}}\,dt$$

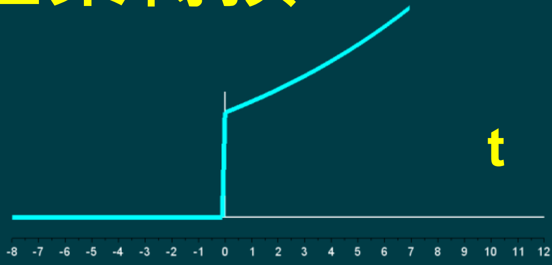
$$= \frac{1}{-(2+jw)}\, e^{-(2+jw)\boxed{t}} \Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{-(2+jw)}\, \overbrace{e^{-(2+jw)\infty}}^{0} \boxed{-\frac{1}{-(2+jw)}}\, \overbrace{e^{-(2+jw)0}}^{1}$$

$$= \frac{1}{(2+jw)}$$

發散指數函數 的 傅立葉轉換

$$x(t) = e^{+2t}\,u(t)$$

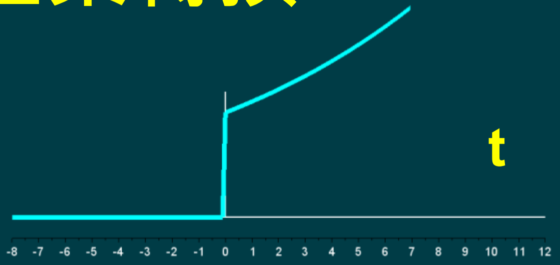


$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{x(t)}\; e^{-jwt}\,dt$$

$$= \int_{\boxed{-\infty}}^{\infty} e^{+2t}\,\boxed{u(t)}\; e^{-jwt}\,dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{\boxed{+2t}}\; e^{\boxed{-jwt}}\,dt \quad = \int_{0}^{\infty} e^{(2-jw)t}\,dt$$

發散指數函數 的 傅立葉轉換



$$x(t) = e^{+2t}\, u(t)$$

$$X(jw) = \int_0^\infty \boxed{e^{(2-jw)t}}\, dt$$

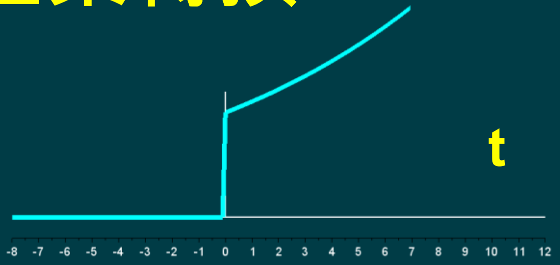
$$= \frac{1}{(2-jw)}\, e^{(2-jw)\boxed{t}} \Bigg|_0^\infty$$

$$= \underbrace{\frac{1}{(2-jw)}\, e^{(2-jw)\infty}}_{\infty} - \underbrace{\frac{1}{(2-jw)}\, e^{(2-jw)0}}_{1}$$

- 此積分結果不存在
- 沒有傅立葉轉換

發散指數函數 的 傅立葉轉換

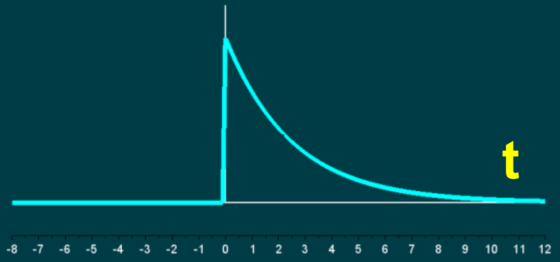
$$\boxed{x(t) = e^{+2t}\,u(t)}$$



$$x(t)\ \boxed{e^{-3t}} = \left(e^{+2t}\,u(t)\right)\left(e^{-3t}\right)$$

$$= e^{(+2-3)t}\,u(t)$$

$$= \boxed{e^{(-1)t}\,u(t)}$$



$$\mathcal{F}\left\{\ x(t)\ e^{-3t}\ \right\} = \mathcal{F}\left\{\ e^{(-1)t}\,u(t)\ \right\}$$

拉普拉斯轉換的基本想法

$$\mathcal{F}\{\, x(t)\ e^{-r\,t} \,\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ \boxed{e^{-r\,t}}\ \boxed{e^{-jwt}}\ dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ e^{-\boxed{(r + jw)}t}\ dt \qquad r + jw = s$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ e^{-\boxed{s}t}\ dt = \mathcal{L}\{\, x(t) \,\} = X(s)$$

拉普拉斯轉換的基本想法

$$\boxed{\mathcal{L}\{\ x(t)\ \}} = \boxed{X(s)} \qquad r + jw = s$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \boxed{e^{-st}}\, dt$$

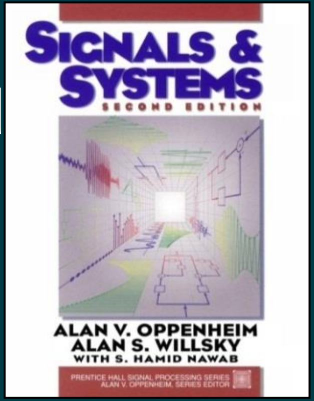
$$= \mathcal{F}\{\ x(t)\, \boxed{e^{-rt}}\ \} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-\boxed{(r + jw)}t}\, dt$$

$$\boxed{\mathcal{F}\{\ x(t)\ \}} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \boxed{e^{-(jw)t}}\, dt$$

$$= \boxed{X(jw)} \qquad s = jw \qquad r = 0$$

參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid Nawab,
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- SciLab:
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/