

從信號與系統到控制

單元：DT-FT系統-4

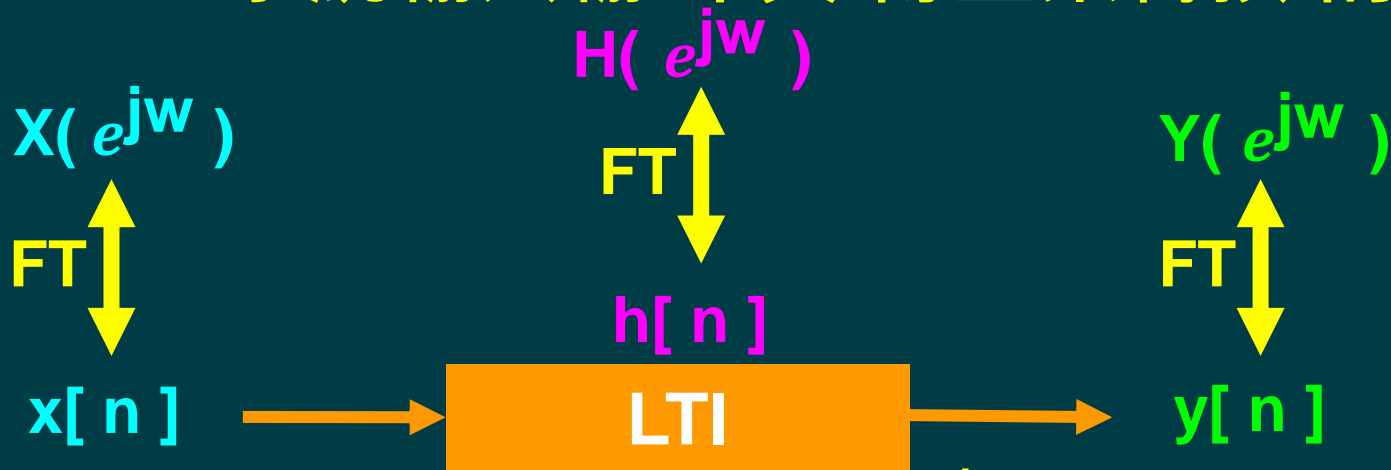
利用 傅立葉轉換 分析 差分方程式

授課老師：連 豐 力

單元學習目標與大綱

- 討論 如何利用 傅立葉轉換
- 分析 一階 與 二階 差分方程式

系統輸入輸出 與 傅立葉轉換 的關係



$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k]$$
$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$

一階 差分方程 的系統

$$\mathcal{F} \{ y[n] - a y[n-1] \} = \mathcal{F} \{ x[n] \}$$

$$\mathcal{F} \{ y[n] \} - a \mathcal{F} \{ y[n-1] \} = \mathcal{F} \{ x[n] \}$$

$$Y(e^{j\omega}) - a e^{-j\omega} Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})$$

$$(1 - a e^{-j\omega}) Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})$$

$$y[n-a] \xleftrightarrow{\text{FT}} e^{-j\omega a} Y(e^{j\omega})$$

一階 差分方程 的系統

$$(1 - a e^{-j\omega}) Y(e^{j\omega}) = \boxed{} X(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{(1 - a e^{-j\omega})}$$

$$h[n] = a^n u[n]$$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{1 - (a e^{-j\omega})}$$

二階 差分方程 的系統

$$\mathcal{F} \left\{ y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] \right\} = \mathcal{F} \left\{ 2x[n] \right\}$$

$$Y(e^{j\omega}) - \frac{3}{4}e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}Y(e^{j\omega})$$

$$\left(1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\omega} \right) Y(e^{j\omega}) = 2 X(e^{j\omega})$$

$$y[n-a] \xleftrightarrow{\text{FT}} e^{-j\omega a} Y(e^{j\omega})$$

二階 差分方程 的系統

$$\left(1 - \frac{3}{4} e^{-j\omega} + \frac{1}{8} e^{-j2\omega} \right) Y(e^{j\omega}) = 2 X(e^{j\omega})$$

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{2}{\left(1 - \frac{3}{4} e^{-j\omega} + \frac{1}{8} e^{-j2\omega} \right)} \\ &= \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega} \right) \left(1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega} \right)} \end{aligned}$$

二階 差分方程 的系統

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} \\ &= \frac{4}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)} - \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} \end{aligned}$$

$$h[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{1 - (a e^{-j\omega})}$$

系統差分方程式 與 傅立葉轉換



- 不用解差分方程式
- 只用傅立葉轉換關係
- 以及多項式運算

$$y[n] - a y[n-1] = b x[n]$$

$$Y(e^{j\omega}) - a e^{-j\omega} Y(e^{j\omega}) = b X(e^{j\omega})$$

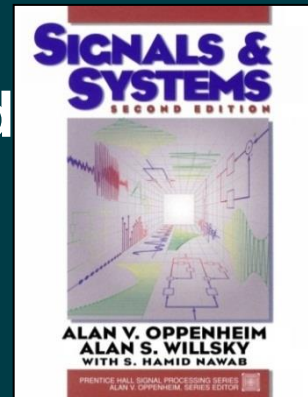
$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{b}{(1 - a e^{-j\omega})}$$

$$y[n-1] \xleftrightarrow{\text{FT}} (e^{-j\omega}) Y(e^{j\omega})$$

$$h[n] = b a^n u[n]$$

參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
Signals & Systems,
Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- **SciLab:**
Open source software for numerical computation
<http://www.scilab.org/>