從信號與系統到控制

單元：DT-FT系統-2

範例 - 系統輸入輸出 與 響應函數 的計算

授課老師：連　豐　力

單元學習目標與大綱

- 以一個範例來說明，
- 如何利用 傅立葉轉換 的關係式，
- 幫助分析 一個系統本身 的 響應，
- 以及 輸入信號 與 輸出信號 之間的關係

系統輸入輸出 與 摺積計算 的關係

$$x[n] \longrightarrow \underset{h[n]}{\boxed{\text{LTI}}} \longrightarrow y[n]$$

$$h[n] = \boxed{a^{n}\, u[n]} \qquad |a| < 1$$

$$x[n] = \boxed{b^{n}\, u[n]} \qquad |b| < 1$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \boxed{x[k]}\,\boxed{h[n-k]}}$$

系統輸入輸出 與 摺積計算 的關係

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow y[n]$$

$$h[n]$$

$$h[n] = a^n u[n] \qquad |a| < 1 \quad \xleftrightarrow{\text{FT}} \quad H(e^{jw}) = \frac{1}{1-(ae^{-jw})}$$

$$x[n] = b^n u[n] \qquad |b| < 1 \quad \xleftrightarrow{\text{FT}} \quad X(e^{jw}) = \frac{1}{1-(be^{-jw})}$$

$$\mathcal{F}\{\, a^n u[n] \,\} = \frac{1}{1-(a\,e^{-jw})}$$

系統輸入輸出 與 摺積計算 的關係

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow y[n]$$

$h[n]$

$$h[n] = a^n u[n] \quad |a| < 1 \quad \xleftrightarrow{FT} \quad H(e^{jw}) = \frac{1}{1-(ae^{-jw})}$$

$$x[n] = b^n u[n] \quad |b| < 1 \quad \xleftrightarrow{FT} \quad X(e^{jw}) = \frac{1}{1-(be^{-jw})}$$

$$Y(e^{jw}) = X(e^{jw}) \cdot H(e^{jw}) = \frac{1}{1-(be^{-jw})} \cdot \frac{1}{1-(ae^{-jw})}$$

系統輸入輸出 與 摺積計算 的關係

$$Y(e^{jw}) = \boxed{\frac{1}{1-(be^{-jw})}} \cdot \boxed{\frac{1}{1-(ae^{-jw})}}$$

如果 $a \neq b$

$$= \frac{a}{(a-b)} \boxed{\frac{1}{1-(ae^{-jw})}} - \frac{b}{(a-b)} \boxed{\frac{1}{1-(be^{-jw})}}$$

$$y[n] = \frac{a}{(a-b)} a^n u[n] - \frac{b}{(a-b)} b^n u[n]$$

$$\mathcal{F}\{\boxed{a^n u[n]}\} = \frac{1}{1-(ae^{-jw})}$$

系統輸入輸出 與 摺積計算 的關係

$$x[\,n\,] \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow y[\,n\,]$$

h[n]

$$H(e^{jw}) = \frac{1}{1-(ae^{-jw})}$$

$$Y(e^{jw}) = X(e^{jw}) \cdot H(e^{jw})$$

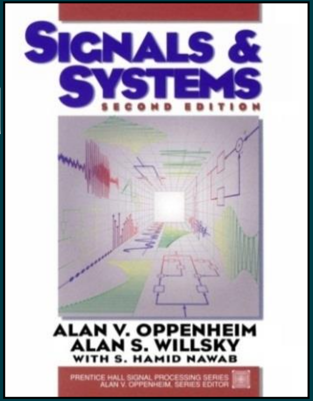
$$X(e^{jw}) = \frac{1}{1-(be^{-jw})}$$

FT $\Updownarrow$

$$a \neq b$$

$$y[\,n\,] = \frac{a}{a-b}a^{n}u[n] - \frac{b}{a-b}b^{n}u[n]$$

參考文獻



- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997

- SciLab:
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/