

從信號與系統到控制

單元：DT-FT性質-5

離散時間 傅立葉轉換 的 翻轉與擴張

授課老師：連 豐 力

單元學習目標與大綱

- 根據 傅立葉轉換 關係式，有下面的性質：
- 線性組合
- 時間軸 與 頻率軸 的 平移
- 共軛關係式
- 差分 與 總和 以及 頻率軸 的 微分
- 時間軸的 翻轉 與 擴張

傅立葉轉換的表示式

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{FT}} X(e^{j\omega}) \quad a^n u[n] \xleftrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{1 - (a e^{-j\omega})}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\} \quad \mathcal{F}\{a^n u[n]\} = \frac{1}{1 - (a e^{-j\omega})}$$

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1 - (a e^{-j\omega})}\right\} = a^n u[n]$$

時間軸的翻轉

- 如果有一個信號： $x[n]$

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{FT}} X(e^{j\omega})$$

$$x[-n] \xleftrightarrow{\text{FT}} X(e^{-j\omega})$$

時間軸的翻轉

$$x[-n] \quad \overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow} \quad X(e^{-j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

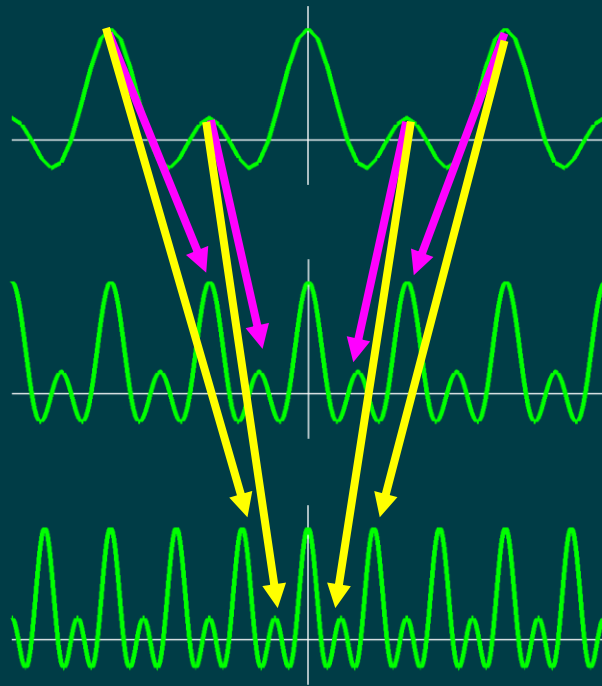
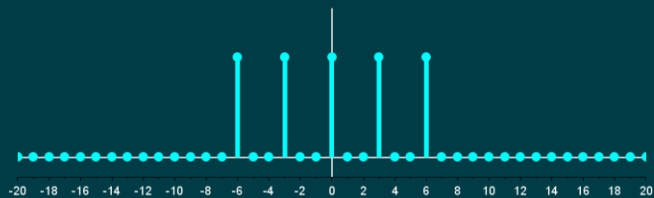
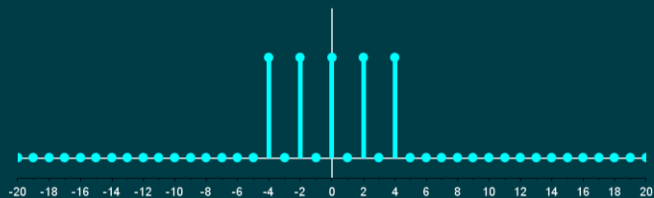
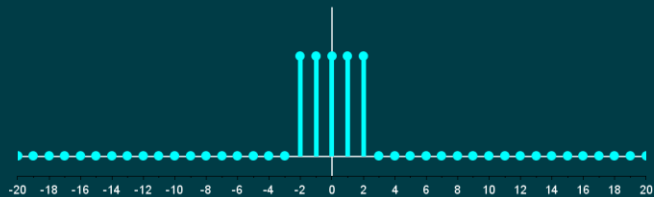
$$X(e^{j(-\omega)}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j(-\omega)n}$$

$$X(e^{-j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-(-n)] e^{-j(\omega)(-n)}$$

$$X(e^{-j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[-(m)] e^{-j(\omega)(m)}$$

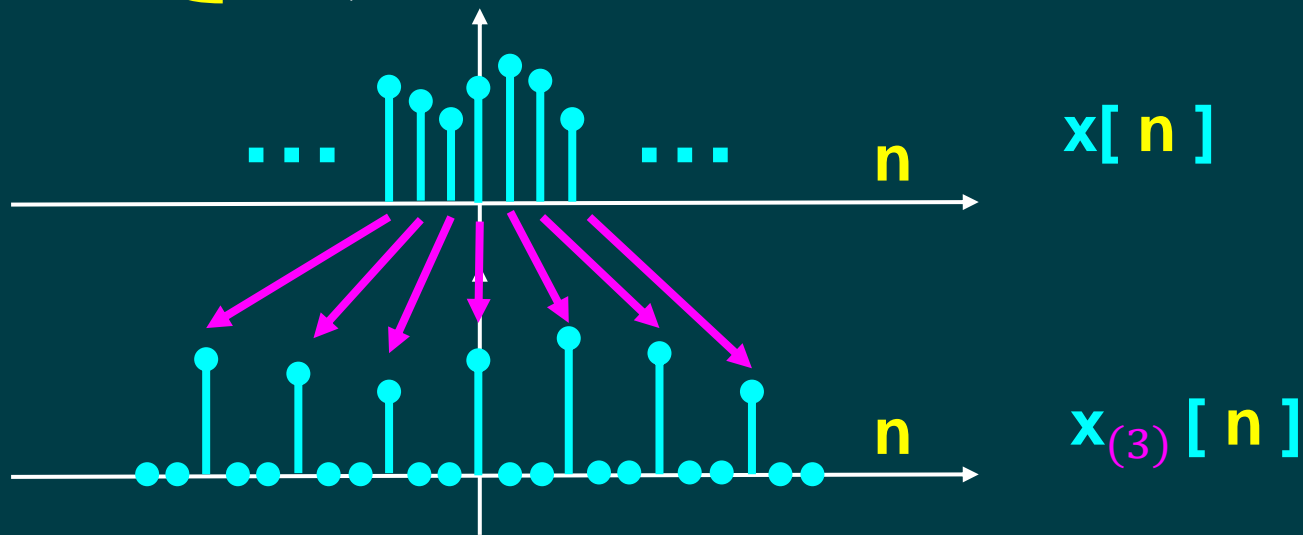
$$\boxed{X(e^{-j\omega})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \boxed{x[-(n)]} e^{-j(\omega)(n)}$$

時間軸的擴張



時間軸的擴張

$$x_{(k)}[m] = \begin{cases} x[m/k], & \text{如果 } m \text{ 是 } k \text{ 的整數倍} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



時間軸的擴張

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$X_{(k)}(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[m] e^{-j\omega m}$$

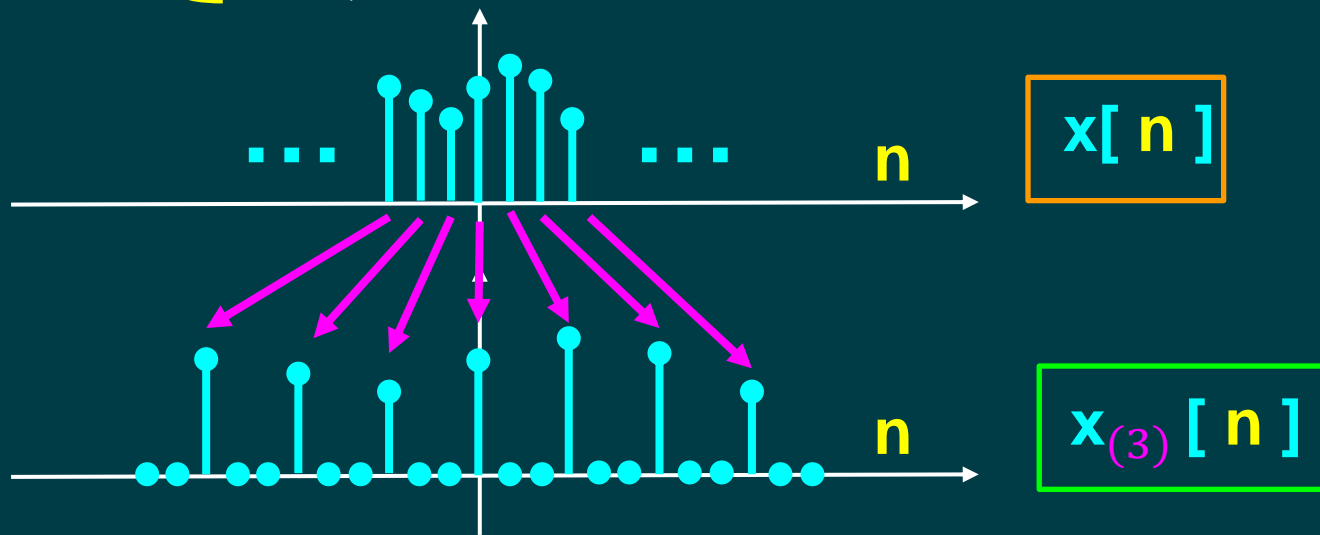
$$m = nk$$

$$X_{(k)}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[nk] e^{-j\omega nk}$$

$$x_{(k)}[m] = \boxed{x_{(k)}[nk]} = \boxed{x[n]}$$

時間軸的擴張

$$x_{(k)}[m] = \begin{cases} x[m/k], & \text{如果 } m \text{ 是 } k \text{ 的整數倍} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



時間軸的擴張

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$X_{(k)}(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[m] e^{-j\omega m}$$

$$m = nk$$

$$X_{(k)}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[nk] e^{-j\omega nk}$$

$$x_{(k)}[m] = x_{(k)}[nk] = x[n]$$

$$X_{(k)}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j(k\omega)n} = X(e^{jk\omega})$$

時間軸的擴張

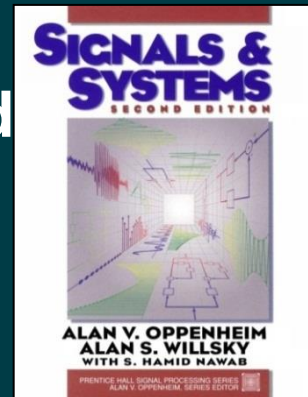
- 如果有一個信號： $x[n]$

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{FT}} X(e^{j\omega})$$

$$x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{\text{FT}} X(e^{jk\omega})$$

參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
Signals & Systems,
Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- **SciLab:**
Open source software for numerical computation
<http://www.scilab.org/>