從信號與系統到控制

單元：DT-FT性質-4

離散時間 傅立葉轉換 的 差分 總和 微分

授課老師：連　豐　力

單元學習目標與大綱

- 根據 傅立葉轉換 關係式，有下面的性質：

- 線性組合
- 時間軸 與 頻率軸 的 平移
- 共軛關係式
- 差分 與 總和 以及 頻率軸 的 微分
- 時間軸的 翻轉 與 擴張

傅立葉轉換 的 表示式

$$x[n] \xleftrightarrow{FT} X(e^{jw}) \qquad a^n u[n] \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{1-(a e^{-jw})}$$

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \, e^{-jwn}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{jw}) \, e^{jwn} \, dw$$

$$X(e^{jw}) = \mathcal{F}\{ x[n] \} \qquad \mathcal{F}\{ a^n u[n] \} = \frac{1}{1-(a e^{-jw})}$$

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{ X(e^{jw}) \} \qquad \mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{1}{1-(a e^{-jw})} \right\} = a^n u[n]$$

差分 與 總和 的關係式

- 如果有一個信號：x[n]

$$x[n] \xleftrightarrow{FT} X(e^{jw})$$

$$x[n-a] \xleftrightarrow{FT} e^{-jwa}\, X(e^{jw})$$

$$x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{FT} X(e^{jw}) - e^{-jw1}\, X(e^{jw})$$

$$= (1 - e^{-jw})\, X(e^{jw})$$

差分 與 總和 的關係式

- 如果有一個信號：x[n]

$$x[n] \overset{FT}{\longleftrightarrow} X(e^{jw})$$

$$x[n] - x[n-1] \overset{FT}{\longleftrightarrow} (1 - e^{-jw})\ X(e^{jw})$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(1 - e^{-jw})} X(e^{jw})$$

$$+ \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(w - 2\pi k)$$

差分 與 總和 的 基本想法

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\boxed{n}} x[m]$$

$$y[n-1] = \sum_{m=-\infty}^{n-1} x[m]$$

$$y[n] - y[n-1] = x[n]$$

$$Y(e^{jw}) - e^{-jw}\, Y(e^{jw})$$

$$= X(e^{jw})$$

$$(1 - e^{-jw})\, Y(e^{jw}) = X(e^{jw})$$

頻率軸 的 微分

- 如果有一個信號：x[n]

$$x[n] \xleftrightarrow{FT} X(e^{jw})$$

$$\frac{1}{j}\, n\, x[n] \xleftrightarrow{FT} \frac{d}{dw} X(e^{jw})$$

$$n\, x[n] \xleftrightarrow{FT} j\,\frac{d}{dw} X(e^{jw})$$

頻率軸 的 微分

$$\boxed{\frac{d}{dw} X(e^{jw})} = \frac{d}{dw} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \boxed{e^{-jwn}}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-jn)\, x[n]\, e^{-jwn}$$

$$= \boxed{(-j)} \boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\, x[n]\, e^{-jwn}}$$

$$j \frac{d}{dw} X(e^{jw})$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\, x[n]\, e^{-jwn}$$

頻率軸 的 微分

$$\boxed{X(e^{jw})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \boxed{x[n]}\ e^{-jwn}$$

$$\boxed{j \frac{d}{dw} X(e^{jw})}$$

FT

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \boxed{n\ x[n]}\ e^{-jwn}$$

差分 總和 頻率軸微分 的關係式

$$x[n] \overset{FT}{\longleftrightarrow} X(e^{jw})$$

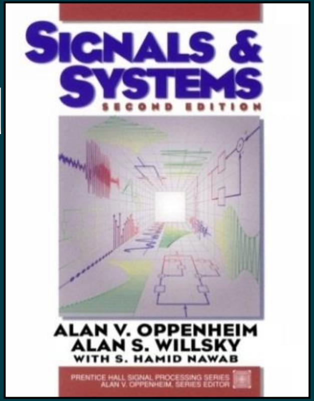
$$x[n] - x[n-1] \overset{FT}{\longleftrightarrow} (1 - e^{-jw}) \quad X(e^{jw})$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(1 - e^{-jw})} X(e^{jw}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(w - 2\pi k)$$

$$n \; x[n] \overset{FT}{\longleftrightarrow} j \frac{d}{dw} X(e^{jw})$$

參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid Nawab,
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- SciLab:
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/