

從信號與系統到控制

單元：DT-FT性質-2

離散時間 傅立葉轉換 的 平移性質

授課老師：連 豐 力

單元學習目標與大綱

- 根據 傅立葉轉換 關係式，有下面的性質：
- 線性組合
- 時間軸 與 頻率軸 的 平移
- 共軛關係式
- 差分 與 總和 以及 頻率軸 的 微分
- 時間軸的 翻轉 與 擴張

傅立葉轉換 的 表示式

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{FT}} X(e^{j\omega}) \quad a^n u[n] \xleftrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{1 - (a e^{-j\omega})}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

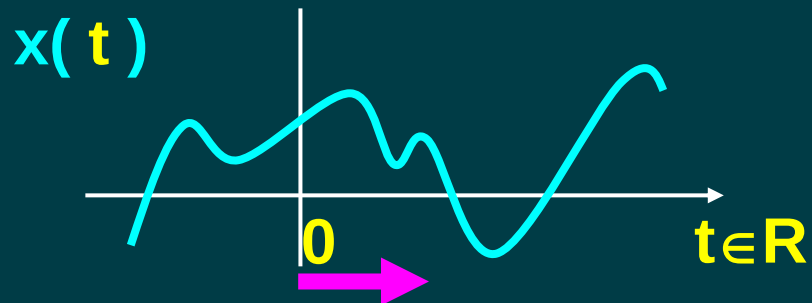
$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\} \quad \mathcal{F}\{a^n u[n]\} = \frac{1}{1 - (a e^{-j\omega})}$$

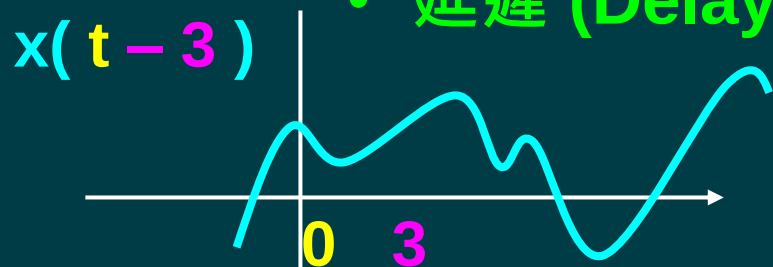
$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1 - (a e^{-j\omega})}\right\} = a^n u[n]$$

信號在時間軸的平移

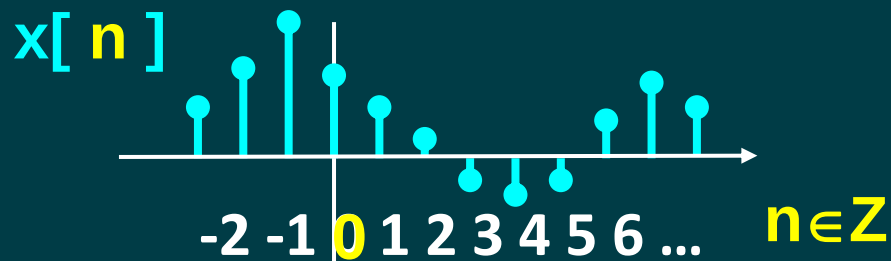
- 連續時間信號 (CT)



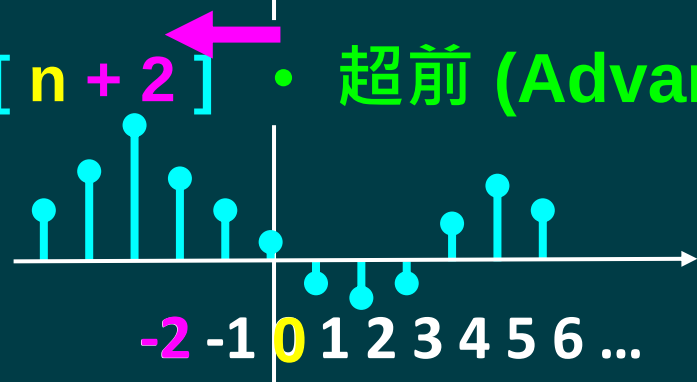
- 延遲 (Delay)



- 離散時間信號 (DT)



- 超前 (Advance)



時間軸上與頻率軸上的平移

- 如果有一個信號： $x[n]$

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{FT}} X(e^{j\omega})$$

$$x[n - a] \xleftrightarrow{\text{FT}} e^{j\omega(-a)} X(e^{j\omega})$$
$$e^{-j\omega a} X(e^{j\omega})$$

$$e^{j(b)n} x[n] \xleftrightarrow{\text{FT}} X(e^{j(\omega-b)})$$

時間軸上的平移

$$\boxed{x[n-a]} \xleftrightarrow{\text{FT}} e^{-j\omega a} X(e^{j\omega})$$

$z[n]$ $Z(e^{j\omega})$

$$\begin{aligned} Z(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \boxed{z[n]} e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n-a] e^{-j\omega n} \end{aligned}$$

時間軸上的平移

$$\begin{array}{ccc} x[n - a] & \xleftrightarrow{\text{FT}} & e^{-j\omega a} X(e^{j\omega}) \\ z[n] & & Z(e^{j\omega}) \end{array}$$

$$\begin{aligned} Z(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n - a] e^{-j\omega n} & n - a = s \\ & & n = s + a \\ &= \sum_{s=-\infty}^{+\infty} x[s] e^{-j\omega(s + a)} \end{aligned}$$

時間軸上的平移

$$\begin{array}{ccc} x[n - a] & \xleftrightarrow{\text{FT}} & e^{-j\omega a} X(e^{j\omega}) \\ z[n] & & Z(e^{j\omega}) \end{array}$$

$$Z(e^{j\omega}) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} x[s] e^{-j\omega(s)} e^{-j\omega(a)}$$

$$= \sum_{s=-\infty}^{+\infty} x[s] e^{-j\omega(s+a)}$$

時間軸上的平移

$$\begin{array}{ccc} x[n - a] & \xleftrightarrow{\text{FT}} & \boxed{e^{-j\omega a} X(e^{j\omega})} \\ z[n] & & Z(e^{j\omega}) \end{array}$$

$$Z(e^{j\omega}) = \boxed{\sum_{s=-\infty}^{+\infty} x[s] e^{-j\omega(s)}} e^{-j\omega(a)}$$

$$= X(e^{j\omega}) e^{-j\omega(a)}$$

頻率軸上的平移

$$e^{j(b)n} x[n] \xleftrightarrow{\text{FT}} \boxed{X(e^{j(w-b)})}$$

$$z[n] \quad Z(e^{jw})$$

$$z[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \boxed{Z(e^{jw})} e^{jwn} dw$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \boxed{X(e^{j(w-b)})} e^{jwn} \boxed{dw}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \boxed{X(e^{js})} e^{j(s+b)n} \boxed{ds}$$

$$w - b = s$$

$$w = s + b$$

$$dw = ds$$

頻率軸上的平移

$$\begin{array}{ccc}
 e^{j(b)n} \boxed{x[n]} & \xleftrightarrow{\text{FT}} & X(e^{j(\omega-b)}) \\
 z[n] & & Z(e^{j\omega})
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 z[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j(s)}) \boxed{e^{j(s+b)n}} ds \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j(s)}) e^{j(s)n} \boxed{e^{j(b)n}} ds \\
 &= e^{j(b)n} \boxed{\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j(s)}) e^{j(s)n} ds}
 \end{aligned}$$

時間軸上與頻率軸上的平移

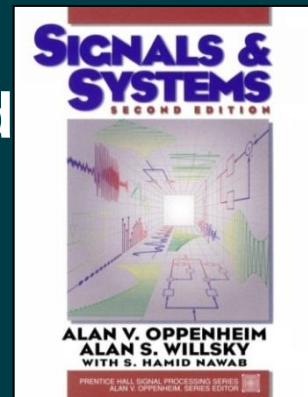
$$x[n] \xleftrightarrow{\text{FT}} X(e^{j\omega})$$

$$x[n - a] \xleftrightarrow{\text{FT}} e^{j\omega(-a)} X(e^{j\omega})$$
$$e^{-j\omega a} X(e^{j\omega})$$

$$e^{j(b)n} x[n] \xleftrightarrow{\text{FT}} X(e^{j(\omega-b)})$$

參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
Signals & Systems,
Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- **SciLab:**
Open source software for numerical computation
<http://www.scilab.org/>