從信號與系統到控制

單元：離散F轉換-9

傅立葉轉換範例 - 週期脈衝函數

授課老師：連　豐　力

單元學習目標與大綱

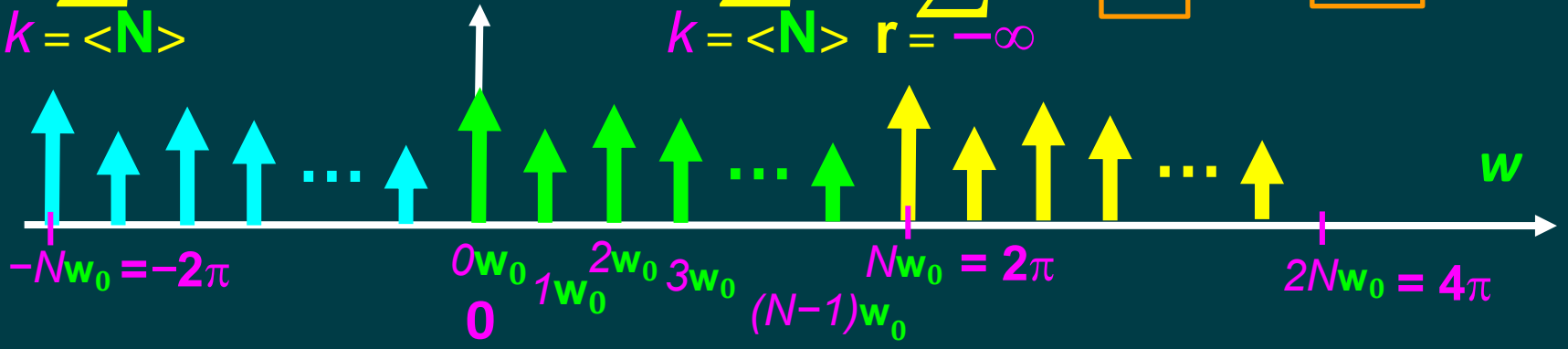
- 根據 傅立葉轉換 有關 週期信號 的關係式
- 計算 週期脈衝函數 的 傅立葉轉換

週期信號的 傅立葉轉換 表示式

- 一個 週期信號 的 傅立葉轉換 的關係式：

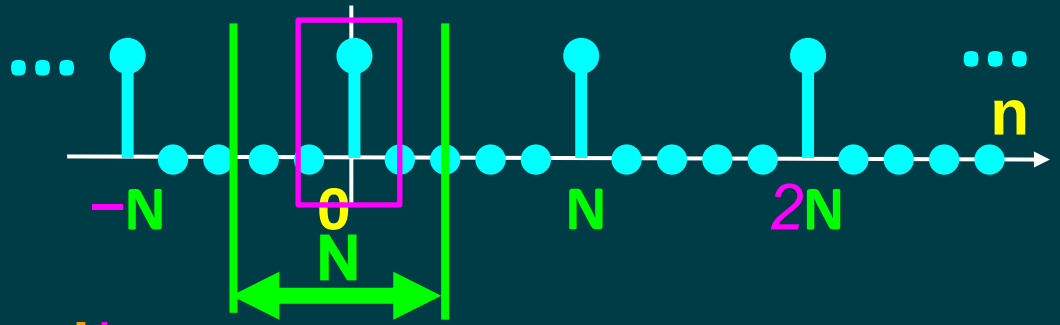
$$x[n] \xleftrightarrow{FT} X(e^{jw})$$

$$= \sum_{k=<N>} a_k \, e^{jkw_0 n} = \sum_{k=<N>} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi \boxed{a_k} \, \delta(w - \boxed{kw_0} - r2\pi)$$



週期脈衝函數 的 傅立葉轉換

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[\, n - kN \,]$$



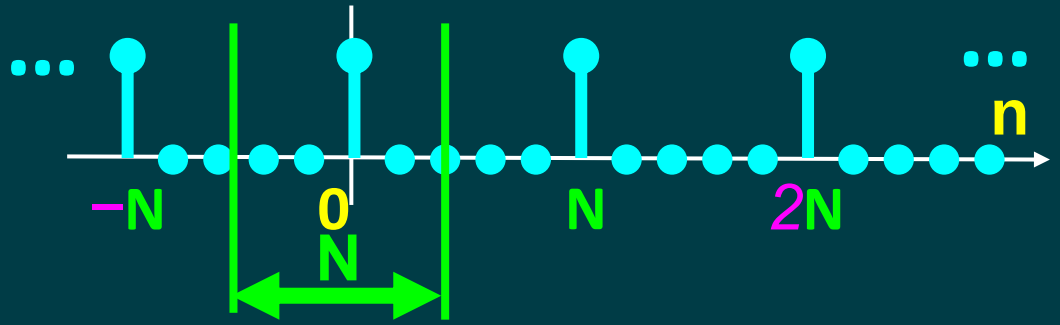
$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]\, e^{-jkw_0 n}$$

$$n = 0$$

$$= \frac{1}{N}\, 1 \left[e^{-jkw_0 0} \right] = \frac{1}{N}$$

週期脈衝函數 的 傅立葉轉換

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[\, n - kN \,]$$



$$a_k = \frac{1}{N}$$

$$X(e^{jw}) = \sum_{k=<N>} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi \boxed{a_k} \delta(w - kw_0 - r2\pi)$$

$$= \sum_{k=<N>} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi \frac{1}{N} \delta(w - kw_0 - r2\pi)$$

週期脈衝函數 的 傅立葉轉換

$$X(e^{jw}) = \sum_{k=<N>} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi \frac{1}{N} \delta(w - k w_0 - r 2\pi)$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$= \frac{2\pi}{N} \sum_{k=<N>} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta(w - k\frac{2\pi}{N} - r 2\pi)$$

$$2\pi = N\frac{2\pi}{N}$$

$$= \frac{2\pi}{N} \sum_{k=<N>} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta(w - k\frac{2\pi}{N} - rN\frac{2\pi}{N})$$

週期脈衝函數 的 傅立葉轉換

$$X(e^{jw}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=<N>} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta\left(w - k\frac{2\pi}{N} - rN\frac{2\pi}{N}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{N} \sum_{k=<N>} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta\left(w - (k + rN)\frac{2\pi}{N}\right)$$

$$m = k + rN$$

$$= \frac{2\pi}{N} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(w - (m)\frac{2\pi}{N}\right)$$

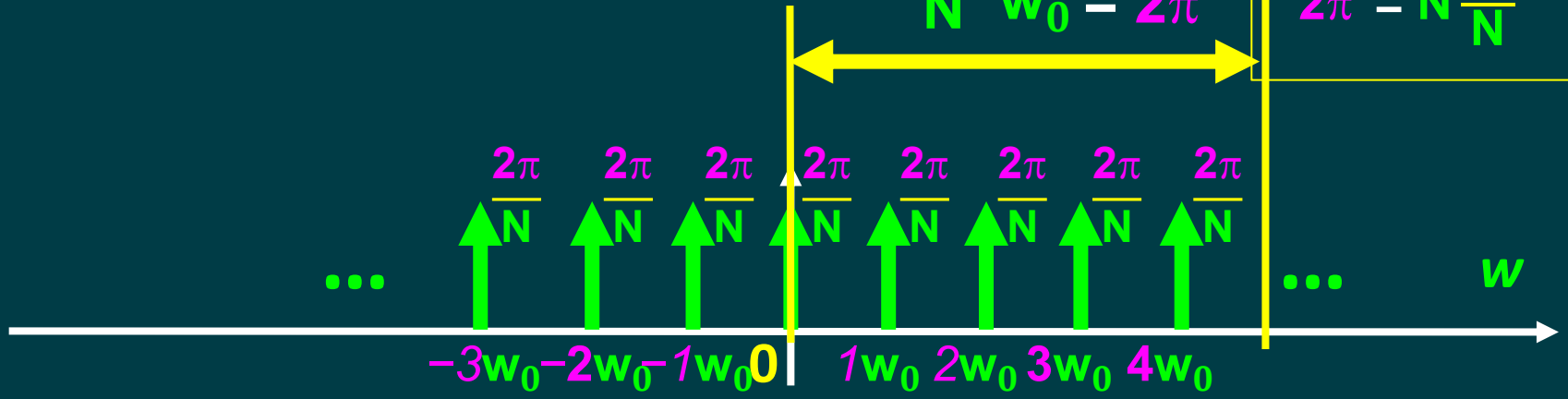
週期脈衝函數 的 傅立葉轉換

$$X(e^{jw}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(w - (m)\frac{2\pi}{N}\right)$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{N}$$

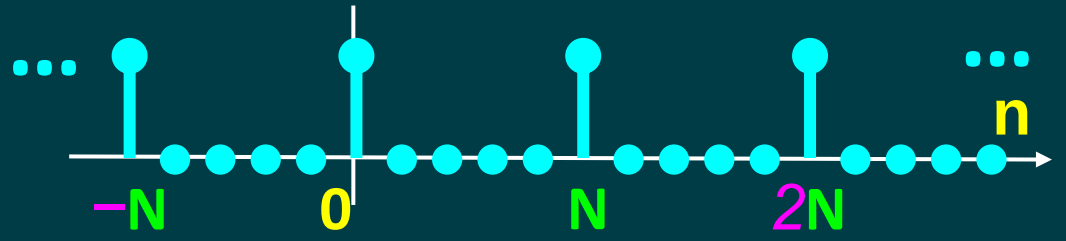
$$N\ w_0 = 2\pi$$

$$2\pi = N\frac{2\pi}{N}$$



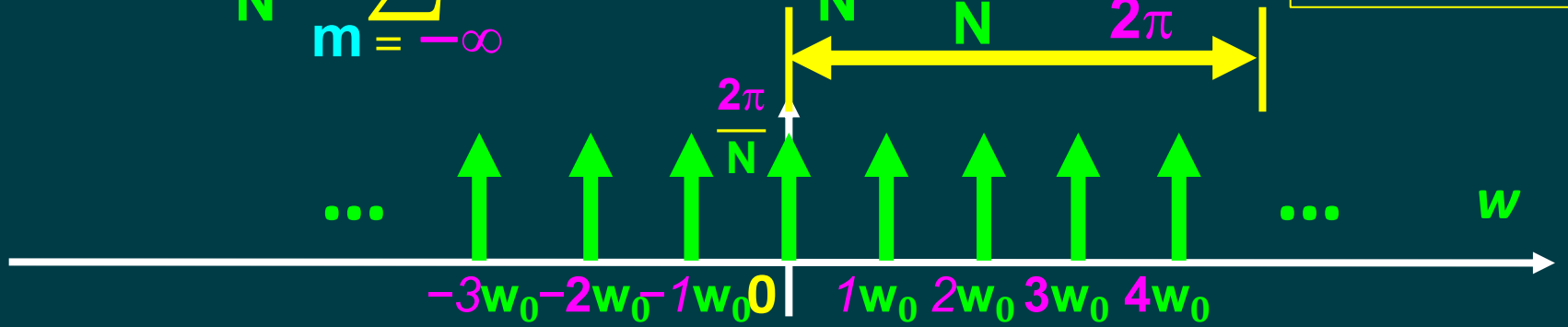
週期脈衝函數 的 傅立葉轉換

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[\, n - kN \,]$$



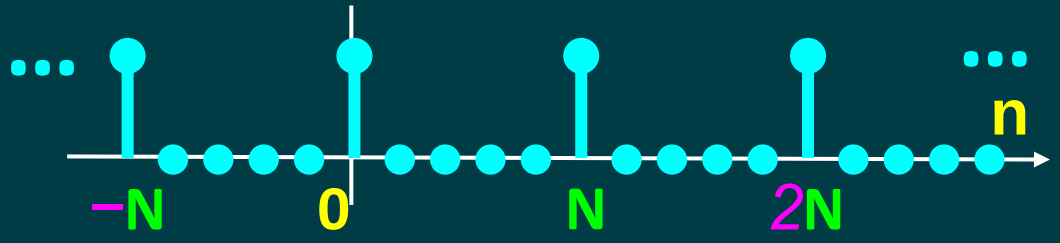
$$X(e^{jw}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(\, w - (m)\,\frac{2\pi}{N}\,)$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{N}$$



週期脈衝函數 的 傅立葉轉換

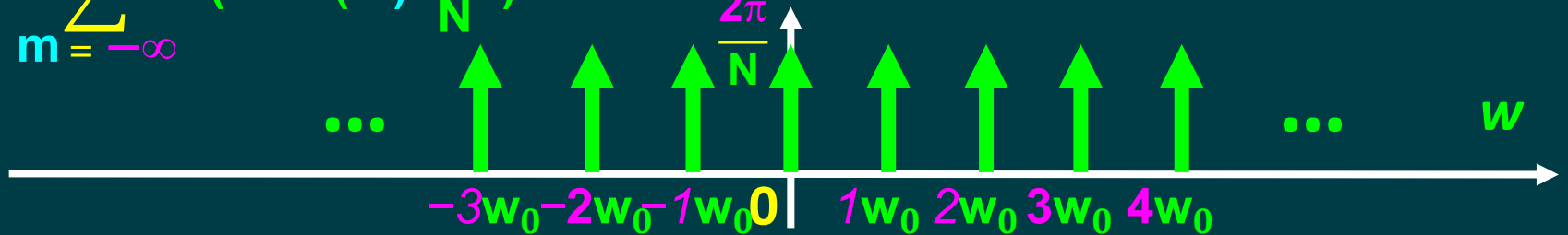
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[\, n - kN \,]$$



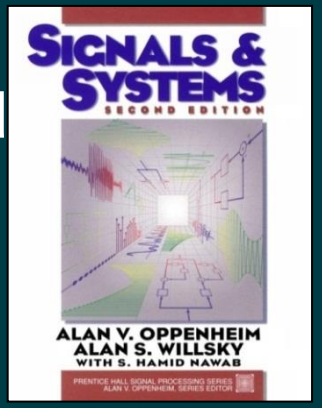
FT

FT

$$\frac{2\pi}{N} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(w - (m)\, \frac{2\pi}{N} \right)$$



參考文獻



- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997

- **SciLab**:
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/