從信號與系統到控制

單元：離散F轉換-7

離散時間 週期信號 的 傅立葉轉換

授課老師：連　豐　力

單元學習目標與大綱

- 針對 離散時間 週期性的信號
- 推導出 傅立葉轉換 的公式與關係式

傅立葉轉換 的 表示式

- 針對 離散時間 非週期 的信號：

$$x[n] \xleftrightarrow{FT} X(e^{jw})$$

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \, e^{-jwn}$$

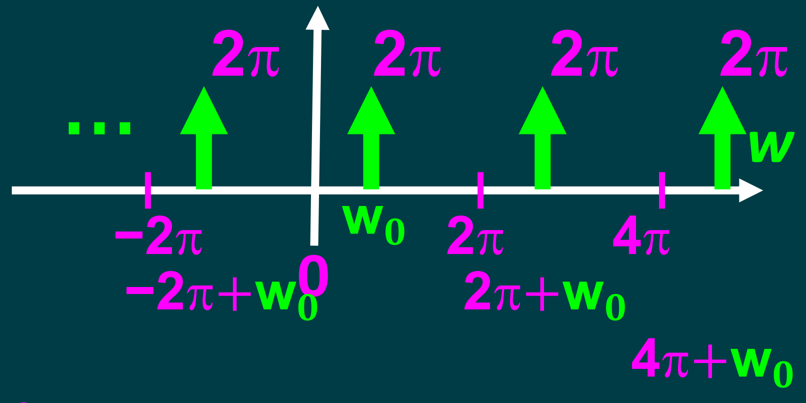
$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{jw}) \, e^{jwn} \, dw$$

- 那麼，針對 週期信號，它的 傅立葉轉換 會是什麼呢？

週期信號的 傅立葉轉換 表示式

- 我們 先看一個 傅立葉轉換 後的函數：

$$
\begin{aligned}
X(e^{jw}) = & \;\cdots \\
& + 2\pi \quad \delta(w - (w_0 - 2\pi)) \\
& + 2\pi \quad \delta(w - (w_0 + 0\pi)) \\
& + 2\pi \quad \delta(w - (w_0 + 2\pi)) \\
& + 2\pi \quad \delta(w - (w_0 + 4\pi)) \\
& + \quad \cdots
\end{aligned}
$$

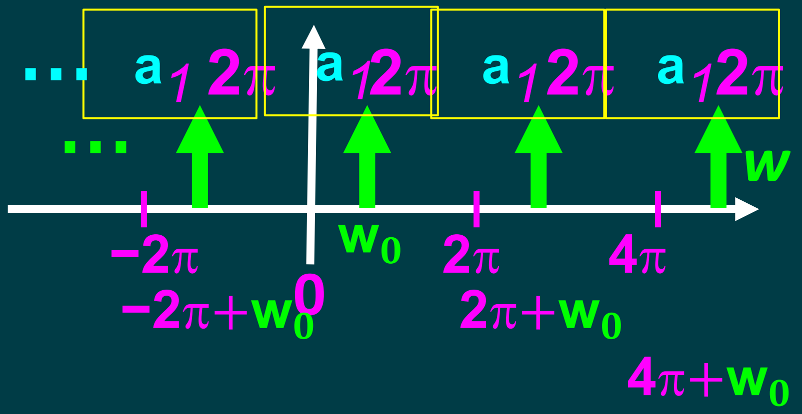


$$= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi \quad \delta(w - (w_0 + r2\pi))$$

週期信號的 傅立葉轉換 表示式

- 我們 再看另一個 傅立葉轉換 後的函數：

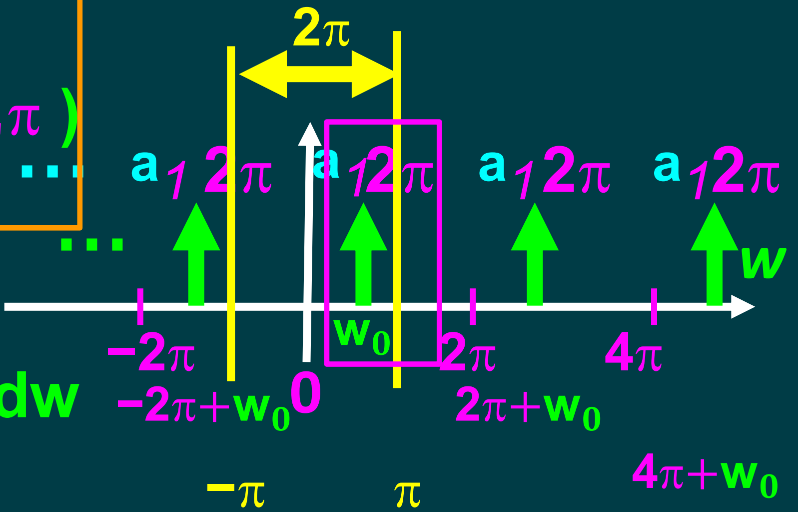
$$X(e^{jw}) = \cdots$$
$$+\ 2\pi\ \boxed{a_1}\ \delta(w - (w_0 - 2\pi))$$
$$+\ 2\pi\ \boxed{a_1}\ \delta(w - (w_0 + 0\pi))$$
$$+\ 2\pi\ \boxed{a_1}\ \delta(w - (w_0 + 2\pi))$$
$$+\ 2\pi\ \boxed{a_1}\ \delta(w - (w_0 + 4\pi))$$
$$+\ \cdots$$



$$= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi\ \boxed{a_1}\,\delta(w - (w_0 + r2\pi))$$

週期信號的 傅立葉轉換 表示式

$$X(e^{jw}) = \boxed{\sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi\, a_1\, \delta(w-w_0-r2\pi)}$$

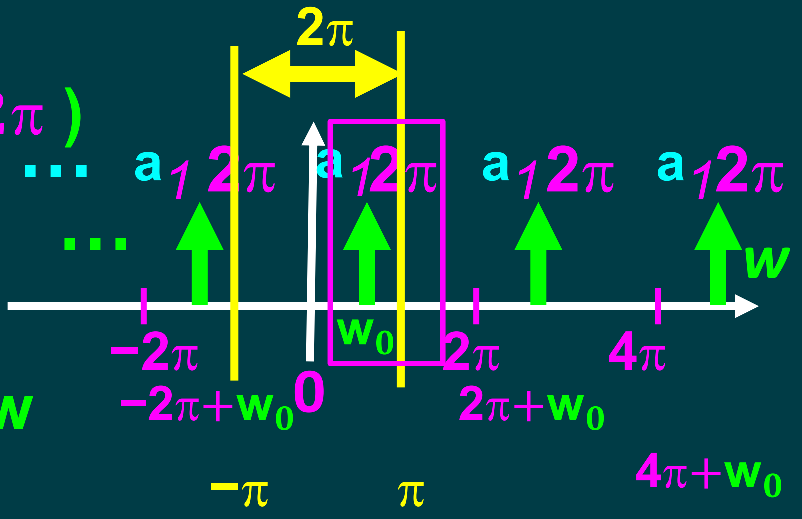


$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \boxed{X(e^{jw})}\, e^{jwn}\, dw$$

$$= \frac{1}{\boxed{2\pi}} \boxed{\int_{2\pi}} \boxed{\sum_{r=-\infty}^{+\infty}} \boxed{2\pi}\, a_1\, \delta(w\boxed{-w_0-r2\pi})\, e^{jwn}\, dw$$

週期信號的 傅立葉轉換 表示式

$$X(e^{jw}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi\, a_1\, \delta(w-w_0-r2\pi)$$

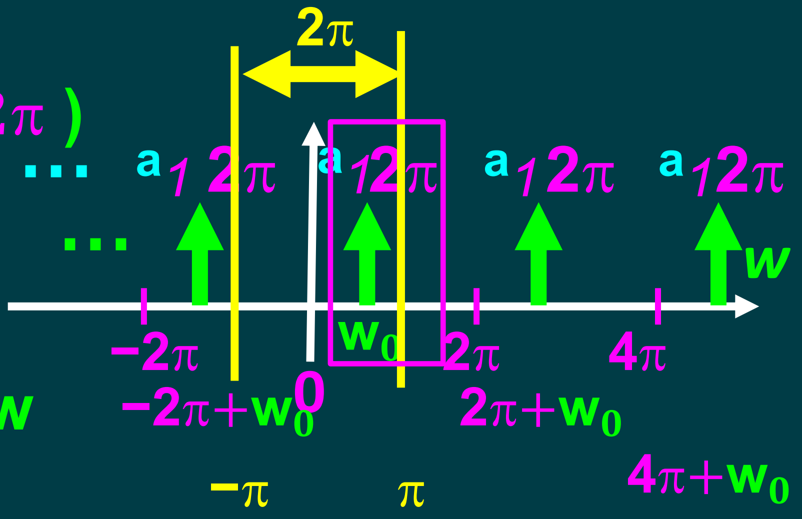


$$x[n] = \int_{-\pi}^{\pi} a_1\, \delta(w-w_0)\, e^{jwn}\, dw$$

$$= \frac{1}{\boxed{2\pi}} \boxed{\int_{2\pi}} \boxed{\sum_{r=-\infty}^{+\infty}} \boxed{2\pi}\, a_1\, \delta(w\boxed{-w_0-r2\pi)})\;\; e^{jwn}\;\; dw$$

週期信號的 傳立葉轉換 表示式

$$X(e^{jw}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi\, a_1\, \delta(w - w_0 - r2\pi)$$



$$x[n] = \int_{-\pi}^{\pi} a_1 \boxed{\delta(w - w_0)}\, e^{j\boxed{w}n}\, dw$$

$$= a_1\, e^{j w_0 n}$$

週期信號的 傅立葉轉換 表示式

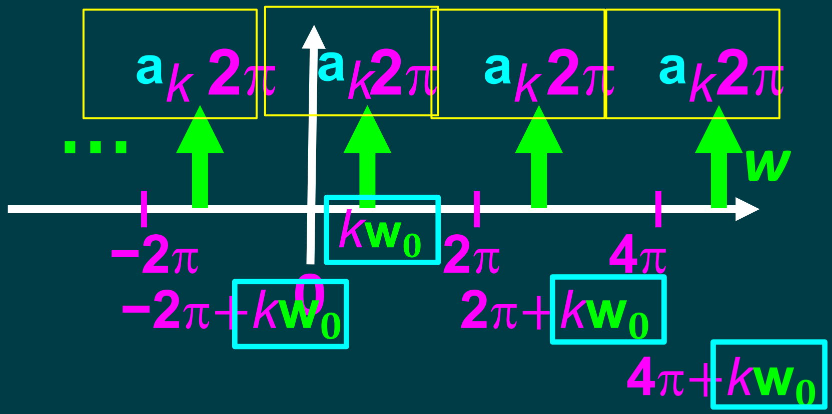
- 因此，我們有下面的一組 傅立葉轉換 關係式：

$$a_l \boxed{e^{j w_0 n}} \xleftrightarrow{\text{FT}} \boxed{\sum_{r=-\infty}^{+\infty}} \boxed{2\pi} a_l \boxed{\delta(w - w_0} \boxed{- r2\pi}\,)$$

週期信號的 傅立葉轉換 表示式

- 依此類推：

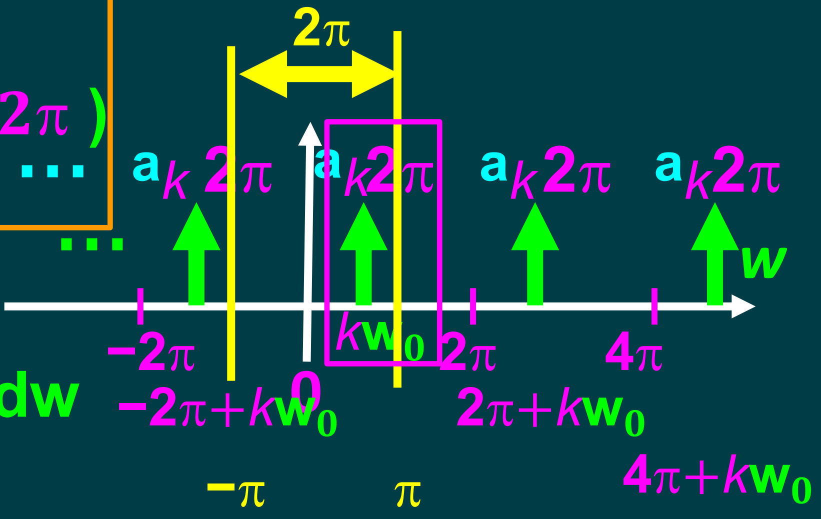
$$X(e^{jw}) = \cdots$$
$$+\ 2\pi\ \boxed{a_k}\ \delta(w - \boxed{(kw_0}-2\pi))$$
$$+\ 2\pi\ \boxed{a_k}\ \delta(w - \boxed{(kw_0}+0\pi))$$
$$+\ 2\pi\ \boxed{a_k}\ \delta(w - \boxed{(kw_0}+2\pi))$$
$$+\ 2\pi\ \boxed{a_k}\ \delta(w - \boxed{(kw_0}+4\pi))$$
$$+\ \cdots$$



$$= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi\ \boxed{a_k}\ \delta(w - \boxed{(kw_0}+r2\pi))$$

週期信號的 傅立葉轉換 表示式

$$X(e^{jw}) = \boxed{\sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi\, a_k\, \delta(w - kw_0 - r2\pi)}$$

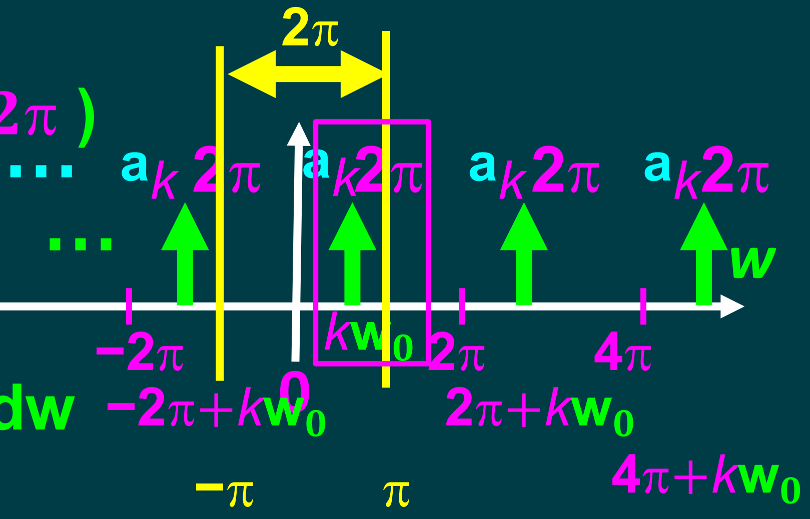


$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \boxed{X(e^{jw})}\, e^{jwn}\, dw$$

$$= \frac{1}{\boxed{2\pi}} \boxed{\int_{2\pi}} \boxed{\sum_{r=-\infty}^{+\infty}} \boxed{2\pi} a_k\, \delta(w \boxed{-kw_0 - r2\pi})\, e^{jwn}\, dw$$

週期信號的 傅立葉轉換 表示式

$$X(e^{jw}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi\, a_k\, \delta(w-kw_0-r2\pi)$$

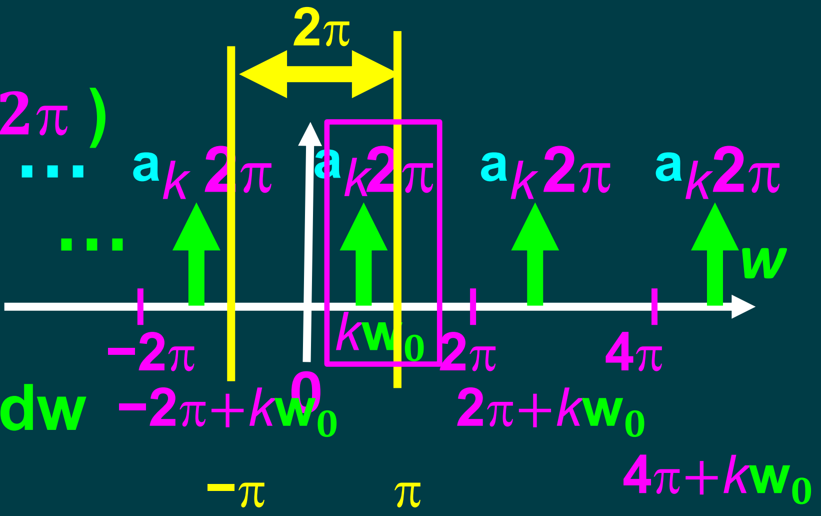


$$x[n] = \int_{-\pi}^{\pi} a_k\, \delta(w-kw_0)\, e^{jwn}\, dw$$

$$= \frac{1}{\boxed{2\pi}} \boxed{\int_{2\pi}} \boxed{\sum_{r=-\infty}^{+\infty}} \boxed{2\pi}\, a_k\, \delta(w\boxed{-kw_0-r2\pi})\, e^{jwn}\, dw$$

週期信號的 傅立葉轉換 表示式

$$X(e^{jw}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi\, a_k\, \delta(w - kw_0 - r2\pi)$$



$$x[n] = \int_{-\pi}^{\pi} a_k\, \delta\boxed{(w - kw_0)}\, e^{j\boxed{w}n}\, dw$$

$$= a_k\, e^{jkw_0 n}$$

週期信號的 傅立葉轉換 表示式

- 因此，我們有下面的兩組 傅立葉轉換 關係式：

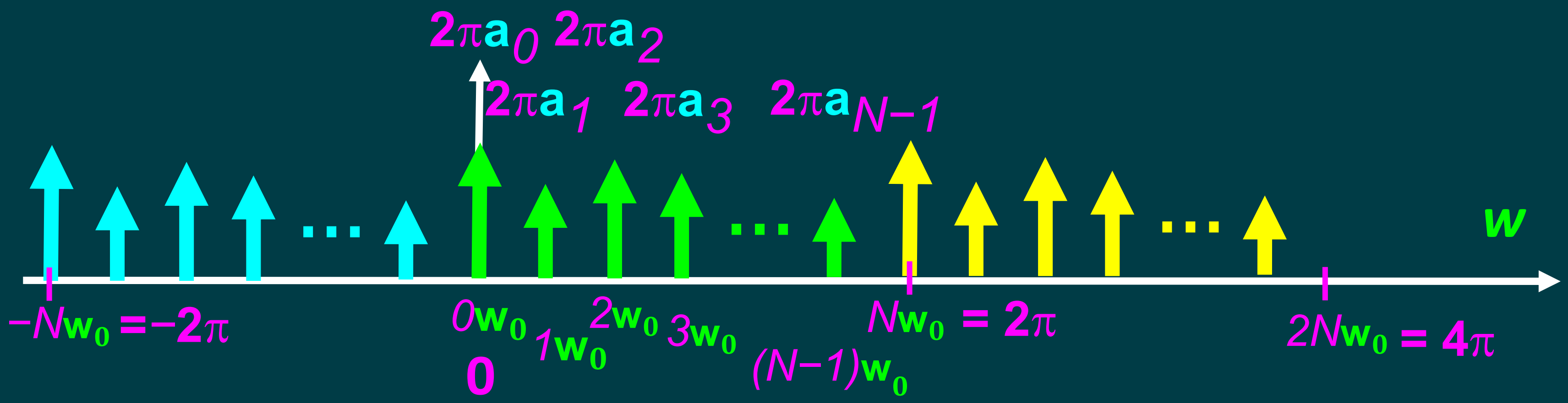
$$a_1 \, e^{j w_0 n} \xleftrightarrow{FT} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_1 \, \delta(w - w_0 - r2\pi)$$

$$a_k \, e^{j k w_0 n} \xleftrightarrow{FT} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \, \delta(w - k w_0 - r2\pi)$$

週期信號的 傅立葉轉換 表示式

- 所以，在一個 2π的週期 內，如果有 N個頻率：

$X(e^{jw}) =$



週期信號的 傅立葉轉換 表示式

- 則，這 N個頻率 信號的 傅立葉轉換 對應關係式：

$$a_0 \, e^{j\,0 w_0 n} \xleftrightarrow{FT} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi \boxed{a_0} \delta(w - \boxed{0 w_0} - r2\pi)$$

$$a_1 \, e^{j\,1 w_0 n} \xleftrightarrow{FT} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi \boxed{a_1} \delta(w - \boxed{1 w_0} - r2\pi)$$

$$a_k \, e^{j\,k w_0 n} \xleftrightarrow{FT} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi \boxed{a_k} \delta(w - \boxed{k w_0} - r2\pi)$$

$$a_{N-1} \, e^{j\,(N-1) w_0 n} \xleftrightarrow{FT} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi \boxed{a_{(N-1)}} \delta(w - \boxed{(N-1) w_0} - r2\pi)$$

週期信號的 傅立葉轉換 表示式

- 根據一個週期信號的 傅立葉級數 表示式：

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k \, e^{jkw_0 n}$$

週期信號的 傅立葉轉換 表示式

- 則，這 N個頻率 信號的 傅立葉轉換 對應關係式：

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k\, e^{jkw_0 n}$$

$$\xleftrightarrow{FT} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi\, a_0\, \delta(w-0w_0-r2\pi)$$

$$\xleftrightarrow{FT} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi\, a_1\, \delta(w-1w_0-r2\pi)$$

$$\xleftrightarrow{FT} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi\, a_k\, \delta(w-kw_0-r2\pi)$$

$$\xleftrightarrow{FT} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi\, a_{(N-1)}\, \delta(w-(N-1)w_0-r2\pi)$$

週期信號的 傅立葉轉換 表示式

- 則，這 N個頻率 信號的 傅立葉轉換 對應關係式：

$$x[n] \overset{FT}{\longleftrightarrow} X(e^{jw})$$

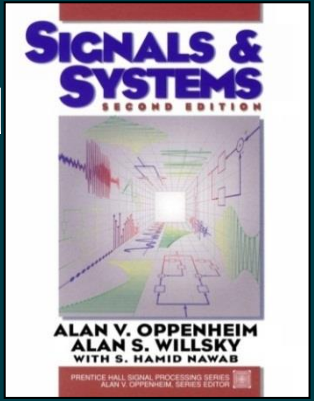
$$= \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jkw_0 n} \overset{FT}{\longleftrightarrow} = \sum_{k=\langle N\rangle} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(w-kw_0-r2\pi)$$

$$\overset{FT}{\longleftrightarrow}$$

$$\overset{FT}{\longleftrightarrow}$$

參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- SciLab:
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/