

從信號與系統到控制

單元：離散F轉換-7

離散時間 週期信號 的 傅立葉轉換

授課老師：連 豐 力

單元學習目標與大綱

- 針對 離散時間 週期性的信號
- 推導出 傅立葉轉換 的公式與關係式

傅立葉轉換 的 表示式

- 針對 離散時間 非週期 的信號：

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{FT}} X(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

- 那麼，針對 週期 信號，它的 傅立葉轉換 會是什麼呢？

週期信號的 傅立葉轉換 表示式

- 我們 先看一個 傅立葉轉換 後的函數：

$$X(e^{j\omega}) = \dots$$

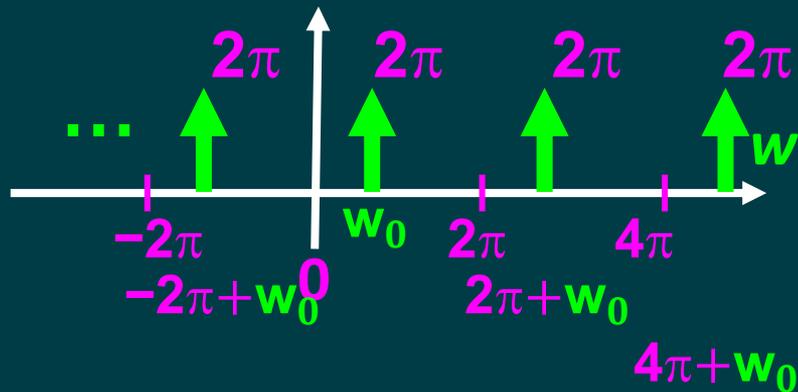
$$+ 2\pi \delta(\omega - (\omega_0 - 2\pi))$$

$$+ 2\pi \delta(\omega - (\omega_0 + 0\pi))$$

$$+ 2\pi \delta(\omega - (\omega_0 + 2\pi))$$

$$+ 2\pi \delta(\omega - (\omega_0 + 4\pi))$$

$$+ \dots$$

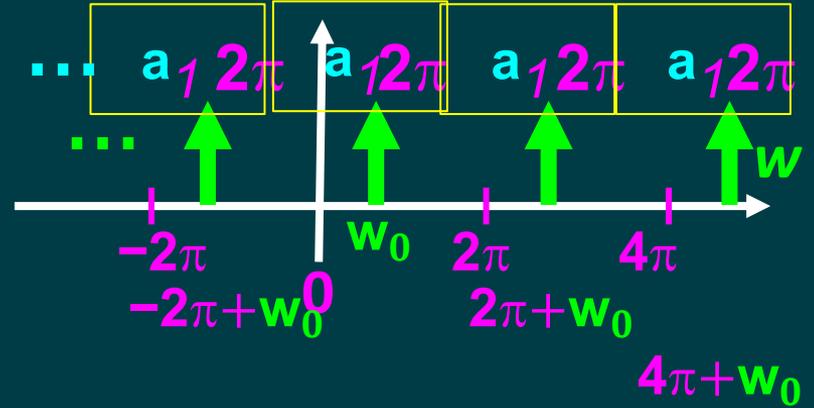


$$= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\omega - (\omega_0 + r2\pi))$$

週期信號的 傅立葉轉換 表示式

- 我們再看另一個 傅立葉轉換 後的函數：

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) = & \dots \\ & + 2\pi a_1 \delta(\omega - (\omega_0 - 2\pi)) \\ & + 2\pi a_1 \delta(\omega - (\omega_0 + 0\pi)) \\ & + 2\pi a_1 \delta(\omega - (\omega_0 + 2\pi)) \\ & + 2\pi a_1 \delta(\omega - (\omega_0 + 4\pi)) \\ & + \dots \end{aligned}$$



$$= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_1 \delta(\omega - (\omega_0 + r2\pi))$$

週期信號的 傅立葉轉換 表示式

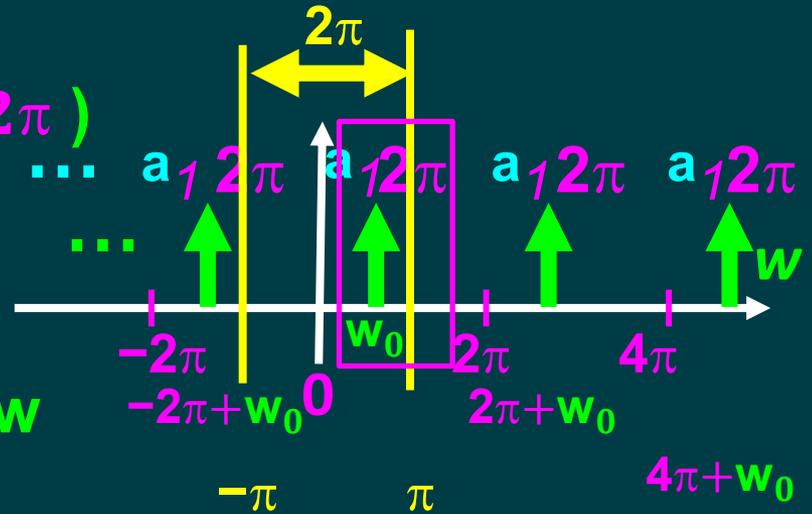
$$\begin{aligned}
 X(e^{j\omega}) &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_1 \delta(\omega - \omega_0 - r2\pi) \dots \\
 x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_1 \delta(\omega - \omega_0 - r2\pi) e^{j\omega n} d\omega
 \end{aligned}$$

週期信號的 傅立葉轉換 表示式

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_1 \delta(\omega - \omega_0 - r2\pi)$$

$$x[n] = \int_{-\pi}^{\pi} a_1 \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_1 \delta(\omega - \omega_0 - r2\pi) e^{j\omega n} d\omega$$

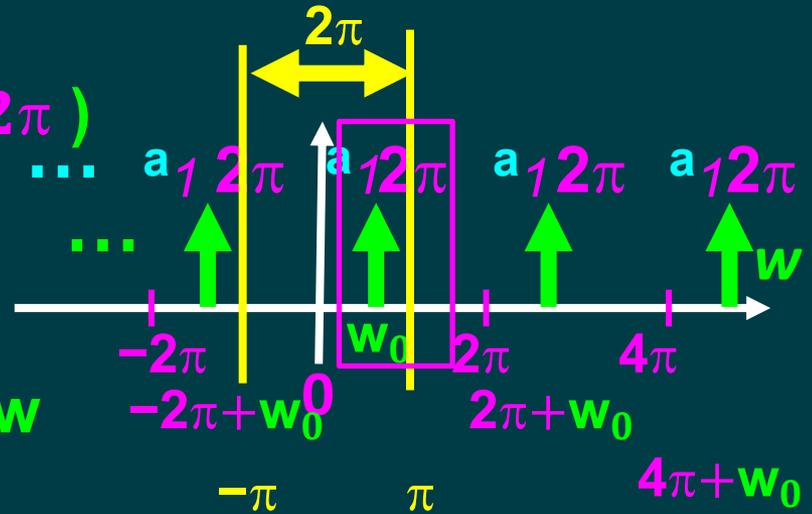


週期信號的 傅立葉轉換 表示式

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_1 \delta(\omega - \omega_0 - r2\pi)$$

$$x[n] = \int_{-\pi}^{\pi} a_1 \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega n} d\omega$$

$$= a_1 e^{j\omega_0 n}$$



週期信號的 傅立葉轉換 表示式

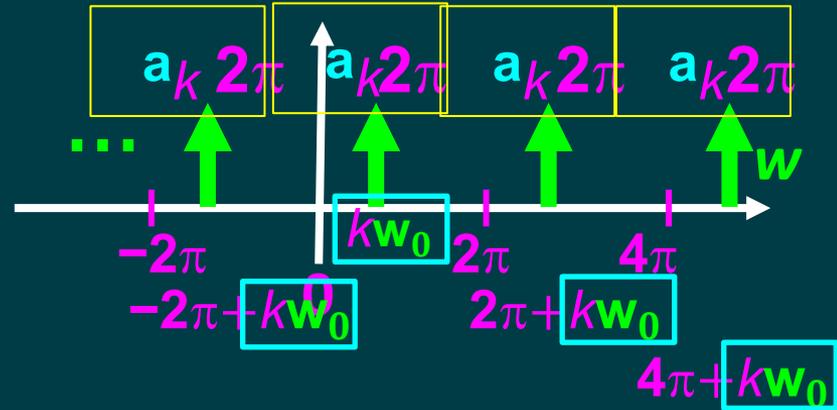
- 因此，我們有下面的一組 傅立葉轉換 關係式：

$$a_1 e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{\text{FT}} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_1 \delta(\omega - \omega_0 - r2\pi)$$

週期信號的 傅立葉轉換 表示式

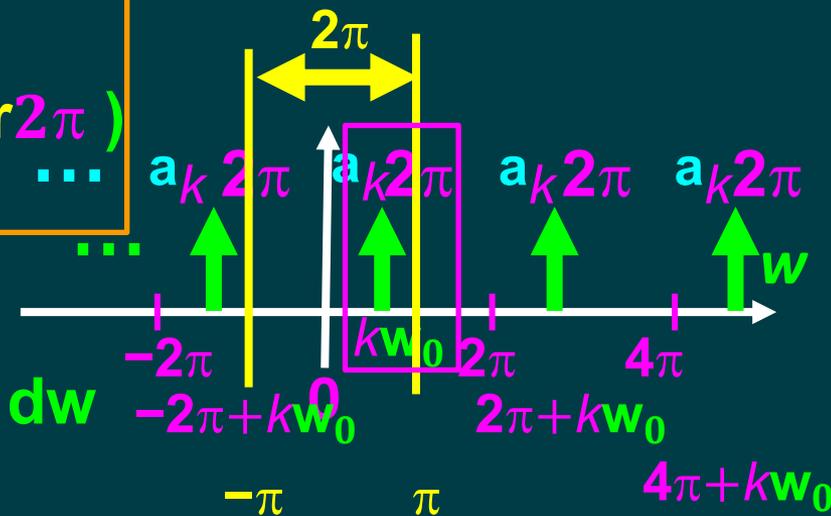
- 依此類推：

$$\begin{aligned}
 X(e^{j\omega}) &= \dots \\
 &+ 2\pi a_k \delta(\omega - (k\omega_0 - 2\pi)) \\
 &+ 2\pi a_k \delta(\omega - (k\omega_0 + 0\pi)) \\
 &+ 2\pi a_k \delta(\omega - (k\omega_0 + 2\pi)) \\
 &+ 2\pi a_k \delta(\omega - (k\omega_0 + 4\pi)) \\
 &+ \dots
 \end{aligned}
 = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - (k\omega_0 + r2\pi))$$



週期信號的 傅立葉轉換 表示式

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0 - r2\pi) \dots$$



$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0 - r2\pi) e^{j\omega n} d\omega$$

週期信號的 傅立葉轉換 表示式

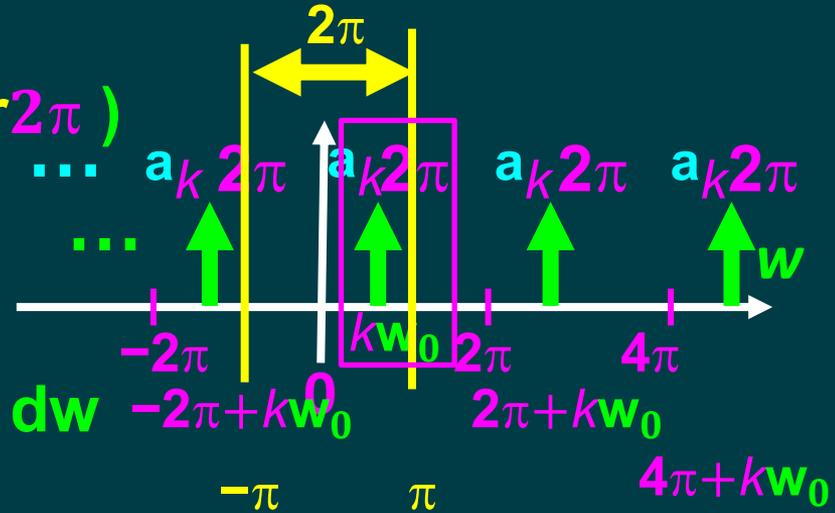
$$\begin{aligned}
 X(e^{j\omega}) &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0 - r2\pi) \\
 x[n] &= \int_{-\pi}^{\pi} a_k \delta(\omega - k\omega_0) e^{j\omega n} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0 - r2\pi) e^{j\omega n} d\omega
 \end{aligned}$$

週期信號的 傅立葉轉換 表示式

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0 - r2\pi)$$

$$x[n] = \int_{-\pi}^{\pi} a_k \delta(\omega - k\omega_0) e^{j\omega n} d\omega$$

$$= a_k e^{j k \omega_0 n}$$



週期信號的 傅立葉轉換 表示式

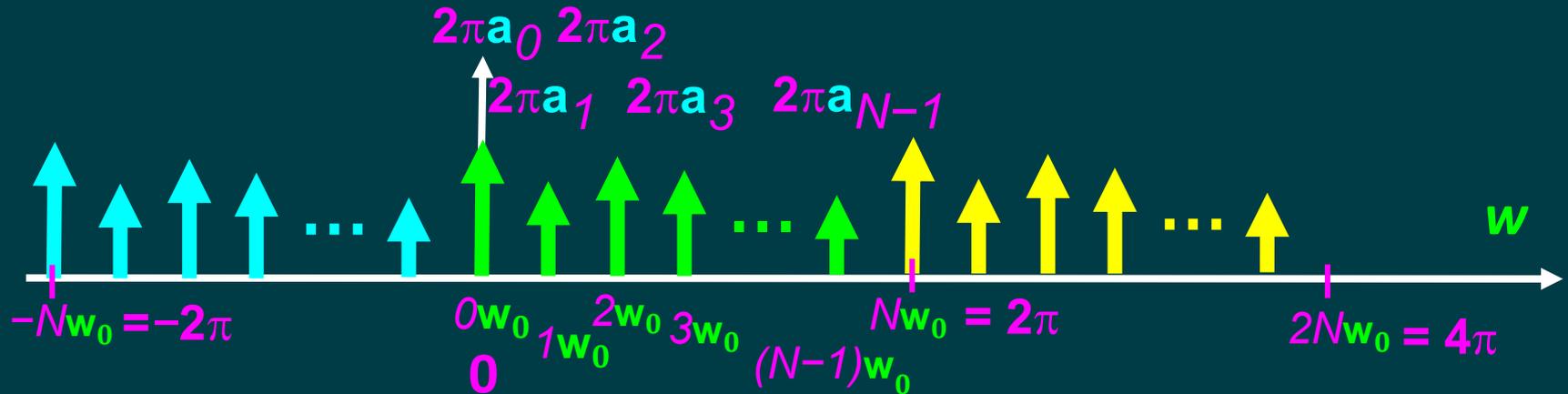
- 因此，我們有下面的兩組 傅立葉轉換 關係式：

$$\begin{aligned} a_1 e^{j\omega_0 n} &\xleftrightarrow{\text{FT}} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_1 \delta(\omega - \omega_0 - r2\pi) \\ a_k e^{jk\omega_0 n} &\xleftrightarrow{\text{FT}} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0 - r2\pi) \end{aligned}$$

週期信號的 傅立葉轉換 表示式

- 所以，在一個 2π 的週期 內，如果有 N 個頻率：

$$X(e^{j\omega}) =$$



週期信號的 傅立葉轉換 表示式

- 則，這 N 個頻率 信號的 傅立葉轉換 對應關係式：

$$\begin{array}{l} \boxed{a_0 e^{j0\omega_0 n}} \xleftrightarrow{\text{FT}} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi \boxed{a_0} \delta(\omega - \boxed{0\omega_0} - r2\pi) \\ \boxed{a_1 e^{j1\omega_0 n}} \xleftrightarrow{\text{FT}} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi \boxed{a_1} \delta(\omega - \boxed{1\omega_0} - r2\pi) \\ \boxed{a_k e^{jk\omega_0 n}} \xleftrightarrow{\text{FT}} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi \boxed{a_k} \delta(\omega - \boxed{k\omega_0} - r2\pi) \\ \boxed{a_{N-1} e^{j(N-1)\omega_0 n}} \xleftrightarrow{\text{FT}} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi \boxed{a_{(N-1)}} \delta(\omega - \boxed{(N-1)\omega_0} - r2\pi) \end{array}$$

週期信號的 傅立葉轉換 表示式

- 根據一個週期信號的 傅立葉級數 表示式：

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

週期信號的 傅立葉轉換 表示式

- 則，這 **N**個頻率 信號的 傅立葉轉換 對應關係式：

$$\begin{aligned} & x[n] \\ &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \xleftrightarrow{\text{FT}} \\ \xleftrightarrow{\text{FT}} \\ \xleftrightarrow{\text{FT}} \\ \xleftrightarrow{\text{FT}} \end{array} \quad \begin{array}{l} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_0 \delta(\omega - 0\omega_0 - r2\pi) \\ \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_1 \delta(\omega - 1\omega_0 - r2\pi) \\ \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0 - r2\pi) \\ \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_{(N-1)} \delta(\omega - (N-1)\omega_0 - r2\pi) \end{array}$$

週期信號的 傅立葉轉換 表示式

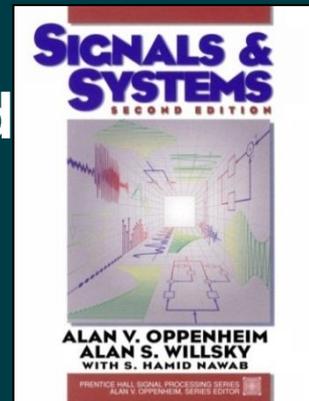
- 則，這 **N**個頻率 信號的 傅立葉轉換 對應關係式：

$$\begin{aligned}
 & x[n] \xleftrightarrow{\text{FT}} X(e^{j\omega}) \\
 & = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \xleftrightarrow{\text{FT}} = \sum_{k=\langle N \rangle} \left[\sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0 - r2\pi) \right]
 \end{aligned}$$

The diagram illustrates the Fourier Transform of a periodic signal. It shows the signal $x[n]$ on the left, which is equal to a sum over k of $a_k e^{jk\omega_0 n}$. This is then transformed to $X(e^{j\omega})$ on the right, which is equal to a sum over k of a_k multiplied by a sum over r of $2\pi \delta(\omega - k\omega_0 - r2\pi)$. The terms $e^{jk\omega_0 n}$ and $\delta(\omega - k\omega_0 - r2\pi)$ are highlighted with green boxes, and the $2\pi a_k$ term is highlighted with a green box. The summation limits $+\infty$ and $-\infty$ are highlighted with a cyan box. The 2π and $r2\pi$ terms are highlighted with cyan boxes. Four double-headed arrows labeled 'FT' connect the terms from left to right.

參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
Signals & Systems,
Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- **SciLab:**
Open source software for numerical computation
<http://www.scilab.org/>