從信號與系統到控制

單元：離散F轉換-6

傅立葉轉換 範例 - 方波函數

授課老師： 連　豐　力

單元學習目標與大綱

- 根據 傅立葉轉換 的公式與關係式
- 計算 方波函數 的 傅立葉轉換

傅立葉轉換 的 表示式

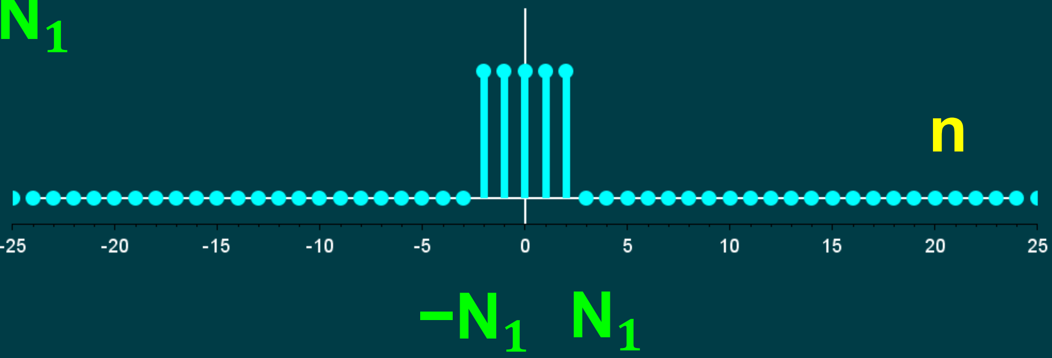
$$x[n] \xleftrightarrow{\text{FT}} X(e^{jw})$$

$$\boxed{X(e^{jw})} = \boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}} \boxed{x[n]} \boxed{e^{-jwn}}$$

$$\boxed{x[n]} = \boxed{\frac{1}{2\pi}} \boxed{\int_{2\pi}} \boxed{X(e^{jw})} \boxed{e^{jwn}} dw$$

離散時間 方波函數的 傳立葉轉換

$$x[n] = \begin{cases} 1, & -N_1 \leq n \leq N_1 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$



離散時間 方波函數的 傅立葉轉換

$$x[n] = \begin{cases} 1, & -N_1 \le n \le N_1 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

$$X(e^{jw}) = \sum_{\boxed{n=-\infty}}^{\boxed{+\infty}} \boxed{x[n]}\, e^{-jwn} = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jwn}$$

$$= \sum_{n=-N_1}^{N_1} (e^{-jw})^n$$

離散時間 方波函數的 傅立葉轉換

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} (e^{-jw})^n$$

$$= (e^{-jw})^{-N_1} + (e^{-jw})^{-N_1+1} + (e^{-jw})^{-N_1+2}$$

$$+ \ldots + (e^{-jw})^0 + (e^{-jw})^1 + \ldots + (e^{-jw})^{N_1}$$

$$= \frac{(e^{-jw})^{-N_1} [\, 1 - (e^{-jw})^{2N_1+1} \,]}{1 - (e^{-jw})}$$

離散時間 方波函數的 傅立葉轉換

$$X(e^{jw}) = \frac{(e^{-jw})^{-N_1}\left[1-(e^{-jw})^{2N_1+1}\right]}{1-(e^{-jw})}$$

$$= \frac{(e^{jwN_1})\left[1-e^{-jw(2N_1+1)}\right]}{1-(e^{-jw})}$$

離散時間 方波函數的 傅立葉轉換

$$1 \quad - \quad e^{-js}$$

$$= \boxed{e^{-js/2}}\, e^{+js/2} \quad - \quad \boxed{e^{-js/2}}\, e^{-js/2}$$

$$= e^{-js/2} \left(e^{+js/2} - e^{-js/2} \right)$$

離散時間 方波函數的 傅立葉轉換

$$X(e^{jw}) = \frac{(e^{-jw})^{-N_1}\,[\,1 - (e^{-jw})^{2N_1+1}\,]}{1 - (e^{-jw})}$$

$$= \frac{(e^{jwN_1})\,\boxed{[\,1 - \boxed{e^{-jw(2N_1+1)}}\,]}}{\boxed{1 - \boxed{(e^{-jw})}}}$$

$$= \frac{(e^{jwN_1})\,(e^{-jw(N_1+1/2)})\,[\,e^{jw(N_1+1/2)} - e^{-jw(N_1+1/2)}\,]}{(e^{-jw/2})\,[\,(e^{jw/2}) - (e^{-jw/2})\,]}$$

$$\boxed{(e^{-js/2})\,[\,e^{+js/2} - e^{-js/2}\,]}$$

離散時間 方波函數的 傅立葉轉換

$$X(e^{jw})$$

$$= \frac{\left(\boxed{e^{jwN_1}}\right)\left(e^{\boxed{-jw(N_1}\boxed{+1/2)}}\right)}{\boxed{\left(e^{-jw/2}\right)}} \boxed{\frac{\left[e^{jw(N_1+1/2)} - e^{-jw(N_1+1/2)}\right]}{\left[\left(e^{jw/2}\right) - \left(e^{-jw/2}\right)\right]}}$$

$$= \frac{\left[e^{jw(N_1+1/2)} - e^{-jw(N_1+1/2)}\right]}{\left[\left(e^{jw/2}\right) - \left(e^{-jw/2}\right)\right]}$$

離散時間 方波函數的 傅立葉轉換

$$X(e^{jw}) = \frac{\left[e^{jw(N_1+1/2)} - e^{-jw(N_1+1/2)} \right] / 2j}{\left[(e^{jw/2}) - (e^{-jw/2}) \right] / 2j}$$

$$= \frac{\sin(w(N_1+1/2))}{\sin(w/2)}$$

$$\boxed{\sin(s) = \frac{1}{2j}(e^{js} - e^{-js})}$$

離散時間 方波函數的 傅立葉轉換

$$X(e^{jw}) = \frac{\sin(w(N_1+1/2))}{\sin(w/2)}$$

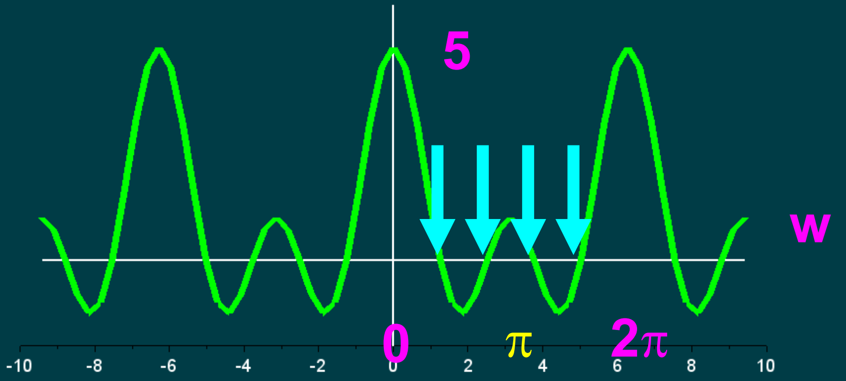
$N_1 = 2$

$$= \frac{\boxed{\sin(w(5/2))}}{\sin(w/2)}$$

$w(5/2) = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi, \ldots$

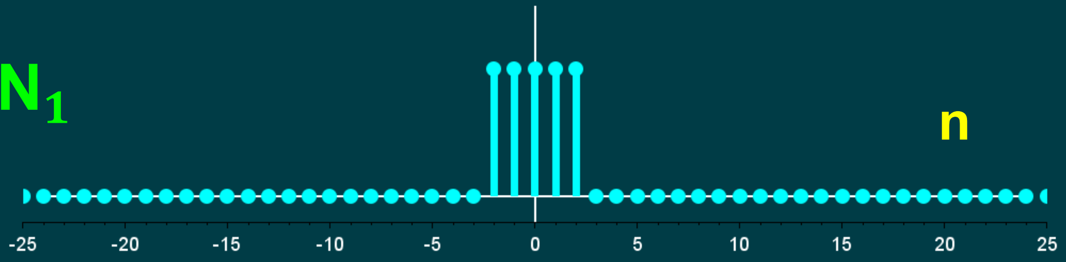
$w = (2/5)\pi,\ (2/5)2\pi,\ (2/5)3\pi, \ldots$

$= (2/5)\pi,\ (4/5)\pi,\ (6/5)\pi, \ldots$



離散時間 方波函數 的 傅立葉轉換

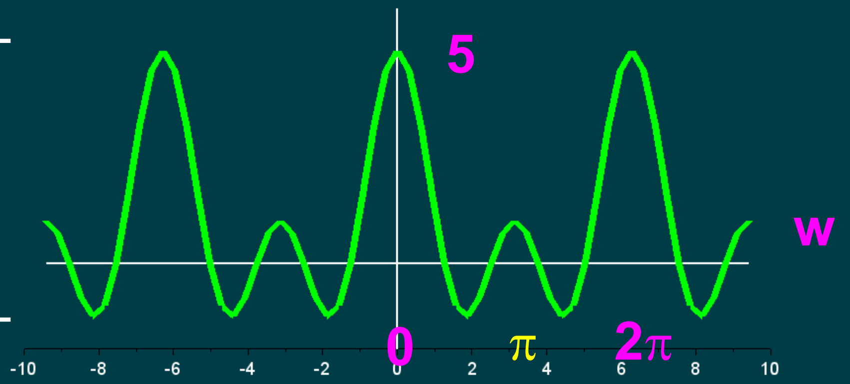
$$x[n] = \begin{cases} 1, & -N_1 \leq n \leq N_1 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$



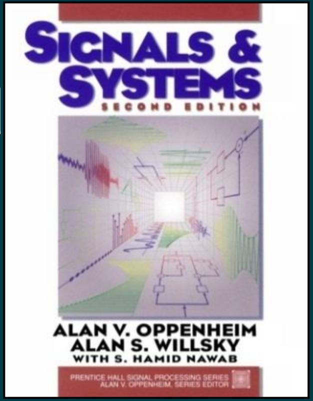
$$X(e^{jw}) = \frac{\sin(w(N_1+1/2))}{\sin(w/2)}$$

$N_1 = 2$

$$= \frac{\sin(w(5/2))}{\sin(w/2)}$$



参考文献



- **Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid**
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997

- **SciLab:**
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/