從信號與系統到控制

單元：離散F轉換-5
傅立葉轉換 範例 - 雙邊指數函數

授課老師：連　豊　力

單元學習目標與大綱

- 根據 傅立葉轉換 的公式與關係式
- 計算 雙邊 指數函數 的 傅立葉轉換
- 瞭解 傅立葉轉換 不存在 的範例

傅立葉轉換 的 表示式

$$x[n] \xleftrightarrow{FT} X(e^{jw})$$

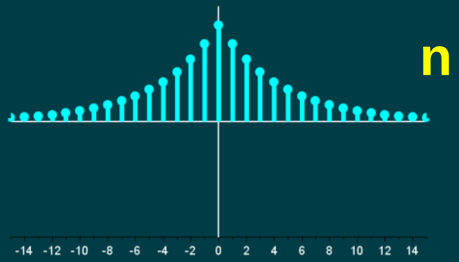
$$\boxed{X(e^{jw})} = \boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}} \boxed{x[n]} \boxed{e^{-jwn}}$$

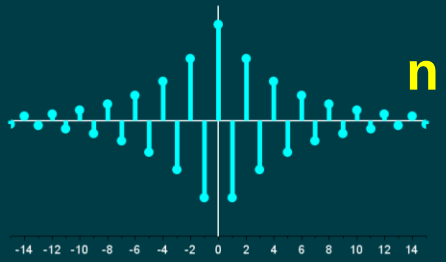
$$\boxed{x[n]} = \boxed{\frac{1}{2\pi}} \boxed{\int_{2\pi}} \boxed{X(e^{jw})} \boxed{e^{jwn}} dw$$

雙邊指數函數 的 傅立葉轉換

$x[n] = a^{|n|}$ $|a| < 1$

$0 < a < 1$ $-1 < a < 0$





雙邊指數函數 的 傅立葉轉換

$$x[n] = a^{|n|} \qquad |a| < 1$$

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \boxed{x[n]}\, e^{-jwn} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{\boxed{|n|}}\, e^{-jwn}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-\boxed{n}}\, e^{-jw\boxed{n}} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^{\boxed{n}}\, e^{-jw\boxed{n}}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} (a\, e^{jw})^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} (a\, e^{-jw})^{n}$$

雙邊指數函數 的 傅立葉轉換

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (\ a\ e^{jw}\ )^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} (\ a\ e^{-jw}\ )^{n}$$

$$m = -\ n$$

$$= \sum_{m=\infty}^{1} (\ a\ e^{jw}\ )^{m} + \sum_{n=0}^{+\infty} (\ a\ e^{-jw}\ )^{n}$$

$|a| < 1$ $\quad |ae^{jw}| < 1$ $\quad |ae^{-jw}| < 1$

$$= \frac{(\ a\ e^{jw}\ )}{1 - (\ a\ e^{jw}\ )} + \frac{1}{1 - (\ a\ e^{-jw}\ )}$$

雙邊指數函數 的 傅立葉轉換

$$X(e^{jw}) = \frac{(a\,e^{jw})}{\boxed{1-(a\,e^{jw})}} + \frac{1}{\boxed{1-(a\,e^{-jw})}}$$

$$= \frac{(a\,\boxed{e^{jw}})(1-a\,\boxed{e^{-jw}}) + (1-a\,e^{jw})}{(1-a\,\boxed{e^{jw}})(1-a\,\boxed{e^{-jw}})}$$

$$= \frac{a\,e^{jw} - a^2 \qquad + \qquad 1-a\,e^{jw}}{(1-a\,e^{jw}-a\,e^{-jw}+a^2)}$$

雙邊指數函數 的 傅立葉轉換

$$X(e^{jw}) = \frac{\boxed{a\,e^{jw}} - a^2 \quad + \quad 1 \boxed{- a\,e^{jw}}}{(1 \boxed{- a\,e^{jw}} \boxed{- a\,e^{-jw}} + a^2)}$$

$$= \frac{1 - a^2}{(1 - a \boxed{(e^{jw} + e^{-jw})} + a^2)}$$

$$= \frac{1 - a^2}{(1 - a\,2\cos(w) + a^2)}$$

$$\boxed{\cos(s) = \frac{1}{2}(e^{js} + e^{-js})}$$

雙邊指數函數 的 傅立葉轉換

$$X(e^{jw}) = \frac{1 - a^2}{(1 - a\cos(w) + a^2)}$$

$w = 0$

$$= \frac{1 - a^2}{(1 - 2a\cos(0) + a^2)} = \frac{1 - a^2}{(1 - 2a + a^2)}$$

$$= \frac{(1 + a)}{(1 - a)} = \frac{\cancel{(1 - a)}(1 + a)}{\cancel{(1 - a)}(1 - a)}$$

雙邊指數函數 的 傅立葉轉換

$$X(e^{jw}) = \frac{1 - a^2}{(1 - a\cos(w) + a^2)}$$

$w = \pi$

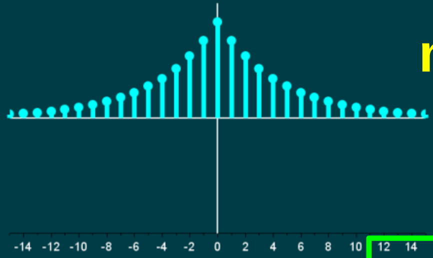
$$= \frac{1 - a^2}{(1 - 2a\cos(\pi) + a^2)} = \frac{1 - a^2}{(1 + 2a + a^2)}$$

$$= \frac{(1 - a)}{(1 + a)} \qquad = \frac{(1 - a)\cancel{(1 + a)}}{(1 + a)\cancel{(1 + a)}}$$

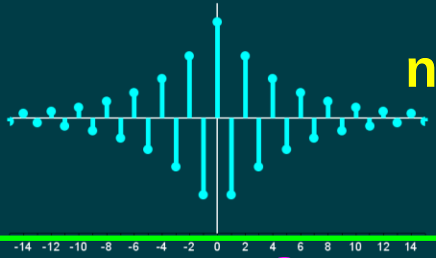
雙邊指數函數 的 傅立葉轉換

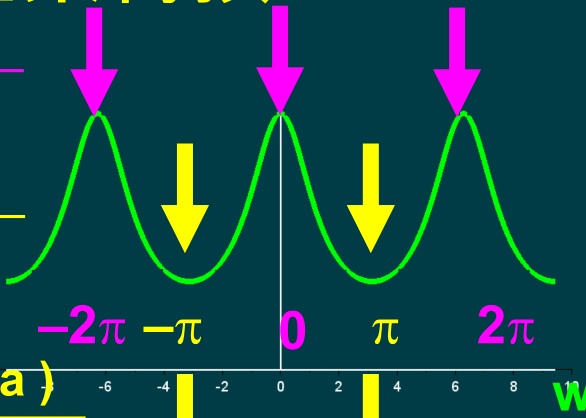
$$x[n] = a^{|n|} \qquad |a| < 1$$

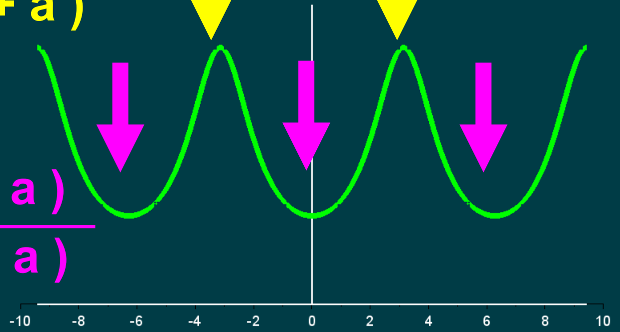
$0 < a < 1$



$-1 < a < 0$







$$X(e^{jw}) = \boxed{\frac{1 - a^2}{(1 - a\cos(w) + a^2)}}$$

$w = 0 \quad \dfrac{(1 + a)}{(1 - a)}$

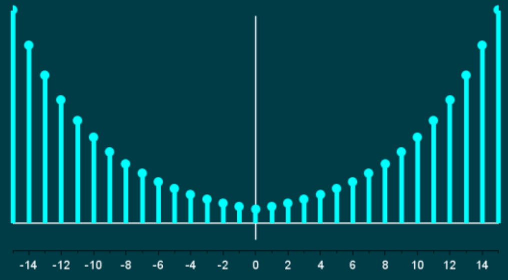
$w = \pi \quad \dfrac{(1 - a)}{(1 + a)}$

發散的 雙邊指數函數

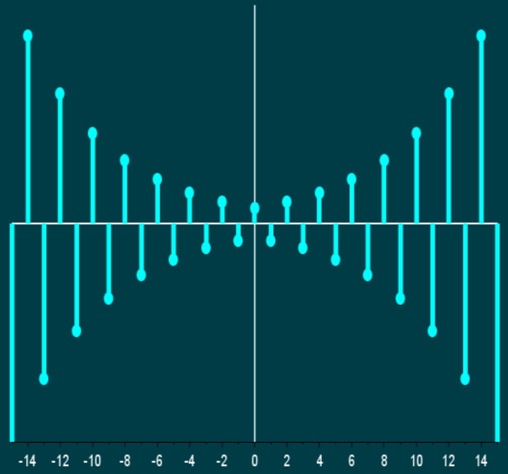
$x[n] = a^{|n|}$

$\boxed{|a| > 1}$

$1 < a$



$a < -1$



發散的 雙邊指數函數 的 傅立葉轉換

$$x[n] = a^{|n|} \qquad |a| > 1$$

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \boxed{x[n]}\, e^{-jwn} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{\boxed{|n|}} e^{-jwn}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-\boxed{n}} e^{-jw\boxed{n}} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^{\boxed{n}} e^{-jw\boxed{n}}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} (a\, e^{jw})^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} (a\, e^{-jw})^{n}$$

發散的 雙邊指數函數 的 傅立葉轉換

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (a\,e^{jw})^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} (a\,e^{-jw})^{n}$$

$m = -n$

$$= \sum_{m=\infty}^{1} (a\,e^{jw})^{m} + \sum_{n=0}^{+\infty} (a\,e^{-jw})^{n}$$

$|a| > 1$ $\quad |ae^{jw}| > 1$ $\quad |ae^{-jw}| > 1$

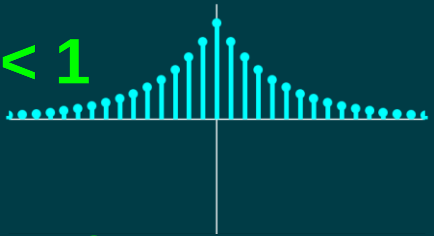
$$= \infty + \infty$$

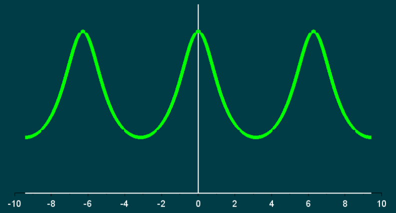
• 沒有傅立葉轉換

指數函數 的 傅立葉轉換

$$a^{|n|} \qquad |a| < 1 \quad \overset{FT}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1 - a^2}{(1 - a\cos(w) + a^2)}$$

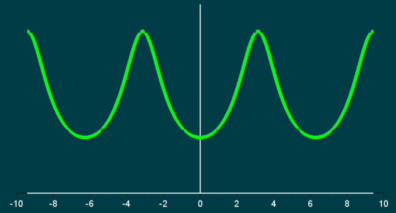
$0 < a < 1$



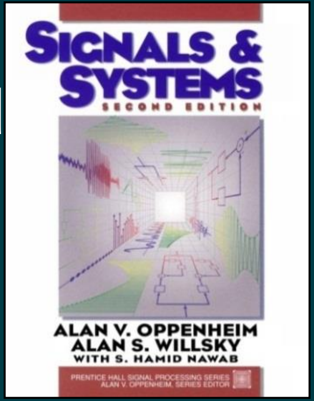


FT

$-1 < a < 0$



參考文獻



- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997

- SciLab:
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/