從信號與系統到控制

單元：離散F轉換-3

離散時間信號 的 傅立葉轉換 是 週期性

授課老師：連　豐　力

單元學習目標與大綱

- 非週期性 的 離散時間信號，
- 其 傅立葉轉換 之後的函數，
- 一定是 週期性 的函數。

傅立葉轉換 的 表示式

$$x[\,n\,] \xleftrightarrow{\text{FT}} X(e^{jw})$$

$$\boxed{X(e^{jw})} = \boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}} \boxed{x[n]} \boxed{e^{-jwn}}$$

$$\boxed{x[\,n\,]} = \boxed{\frac{1}{2\pi}} \boxed{\int_{2\pi}} \boxed{X(e^{jw})} \boxed{e^{jwn}} dw$$

離散 傅立葉轉換 之後是 週期性

$$X(e^{j\boxed{w}}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\; e^{-j\boxed{w}n}$$

$$X(e^{j(w+2\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\; e^{-j\boxed{(w+2\pi)}n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\; e^{-j(w)n}\; e^{-j(2\pi)n}$$

離散 傅立葉轉換 之後是 週期性

$$\boxed{X(e^{j(w+2\pi)})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j(w)n}\, \boxed{e^{-j(2\pi)}}^{1} n$$

$$= \boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j(w)n}}$$

$$\boxed{e^{js} = \cos(s) + j\sin(s)}$$

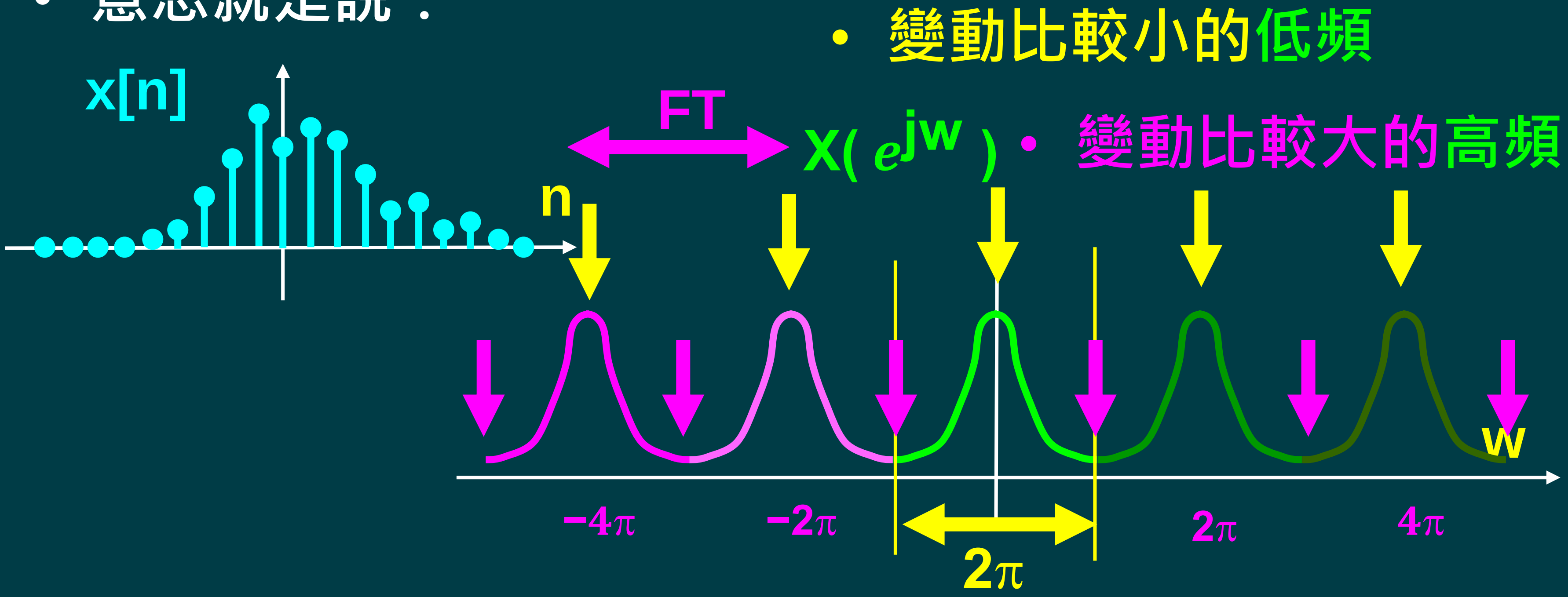
$$= \boxed{X(e^{jw})}$$

1 0

$$\boxed{e^{-j2\pi} = \cos(-2\pi) + j\sin(-2\pi)}$$

離散 傅立葉轉換 之後是 週期性

- 意思就是說：



離散 傅立葉轉換 之後是 週期性

- 為什麼呢？

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \boxed{e^{-jwn}}$$

$w = 2\pi \quad e^{-jwn} = (e^{-j2\pi})^n = (\overset{1}{\cos(-2\pi)} + j\,\overset{0}{\sin(-2\pi)})^n$

$= (1)^n = 1$

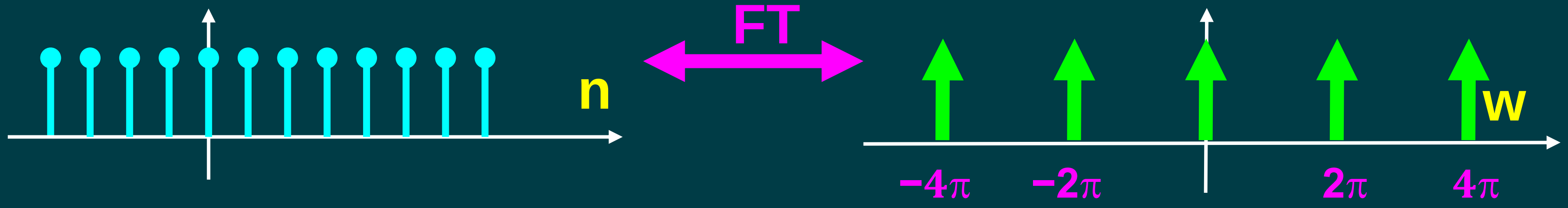
$w = \pi \quad e^{-jwn} = (e^{-j\pi})^n = (\overset{-1}{\cos(-\pi)} + j\,\overset{0}{\sin(-\pi)})^n$

$= (-1)^n$

離散 傅立葉轉換 之後是 週期性

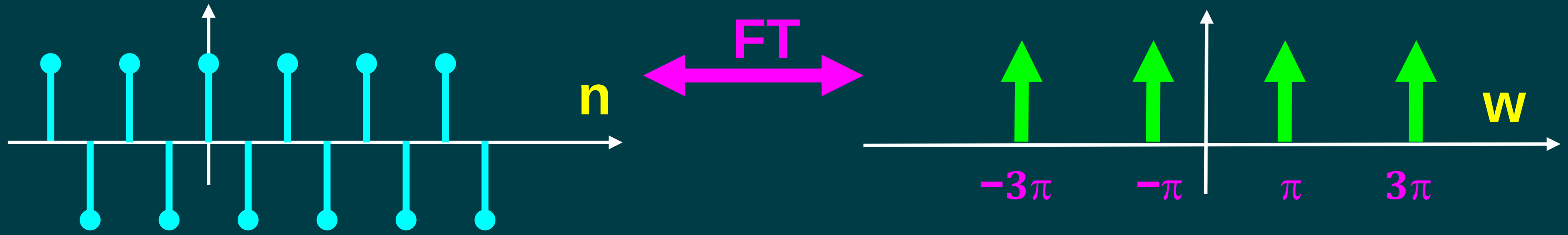
$w = 2\pi \quad e^{-jwn} = (1)^n$

- 變動比較小是低頻



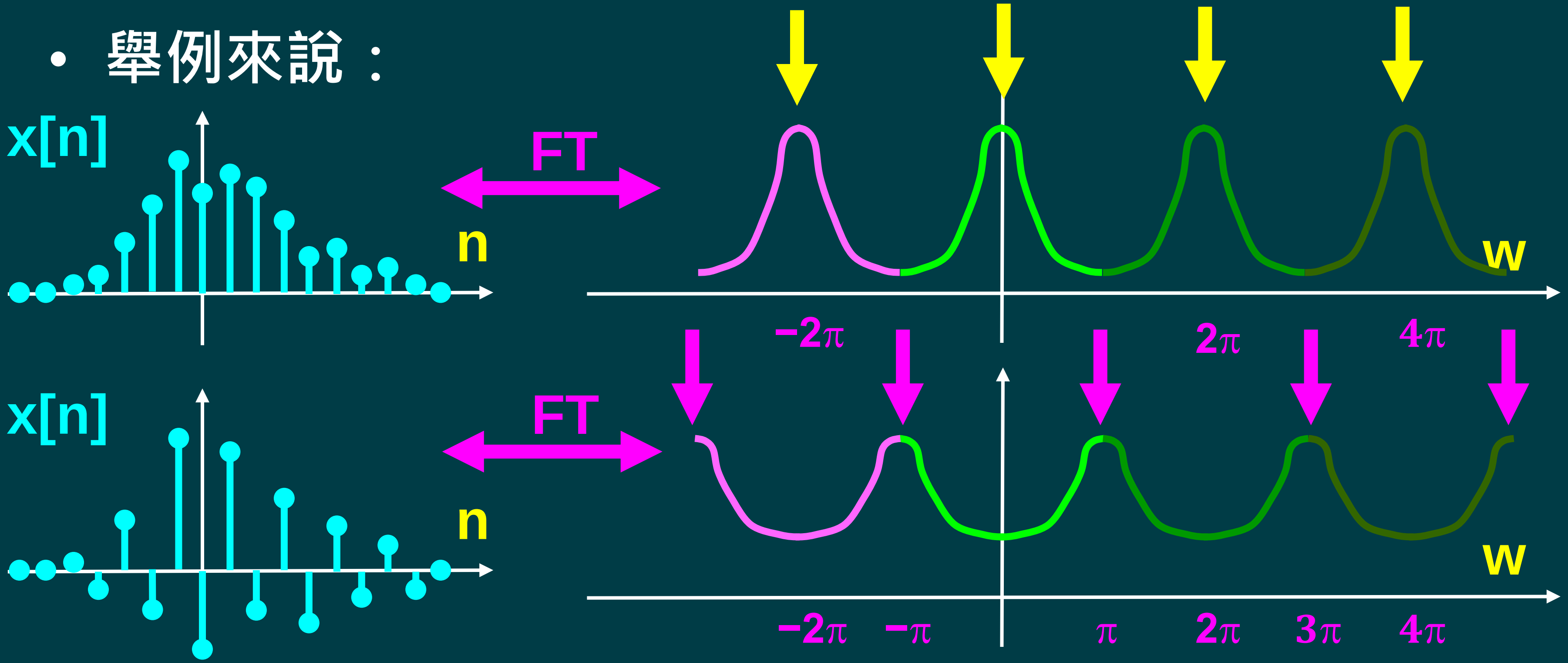
$w = \pi \quad e^{-jwn} = (-1)^n$

- 變動比較大是高頻

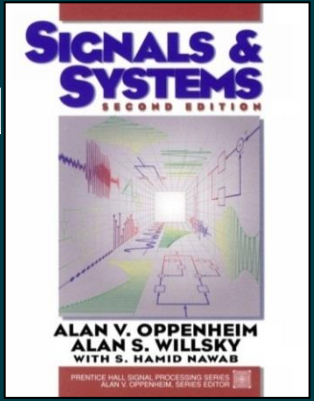


離散 傅立葉轉換 之後是 週期性

- 舉例來說：



參考文獻



- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997

- SciLab:
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/