# 從信號與系統到控制

## 單元：離散F轉換-2

## 從 傅立葉級數 到 傅立葉轉換

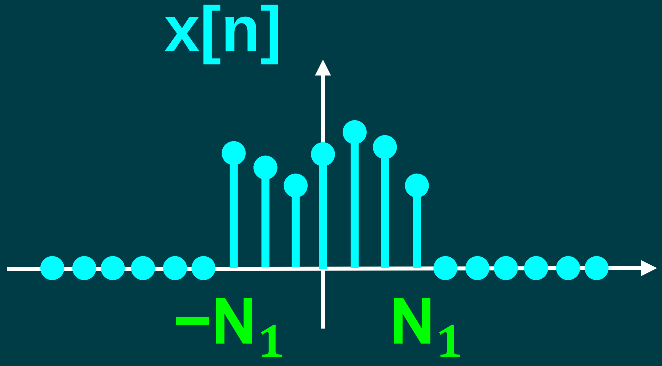
授課老師： 連　豐　力

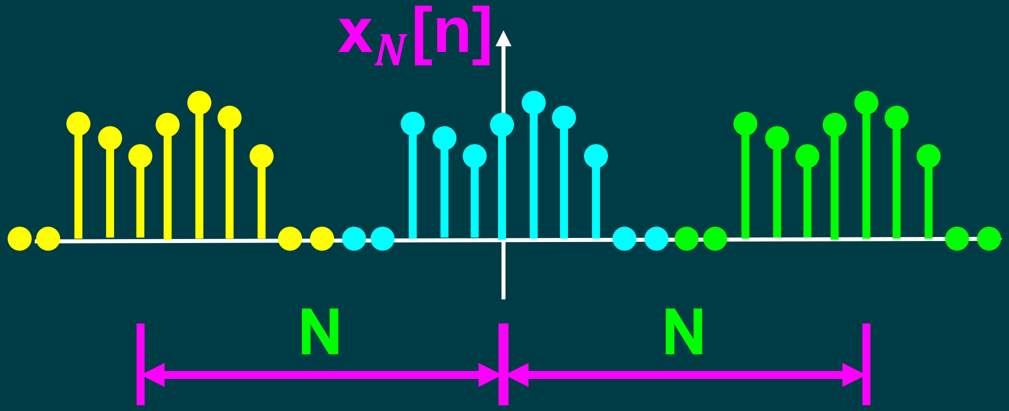
# 單元學習目標與大綱

- 推導出 傅立葉轉換 的公式與關係式
- 從 傅立葉級數 出發 進展到 傅立葉轉換
- 從 週期性的信號 到 非週期性的信號

# 非週期信號的表示式

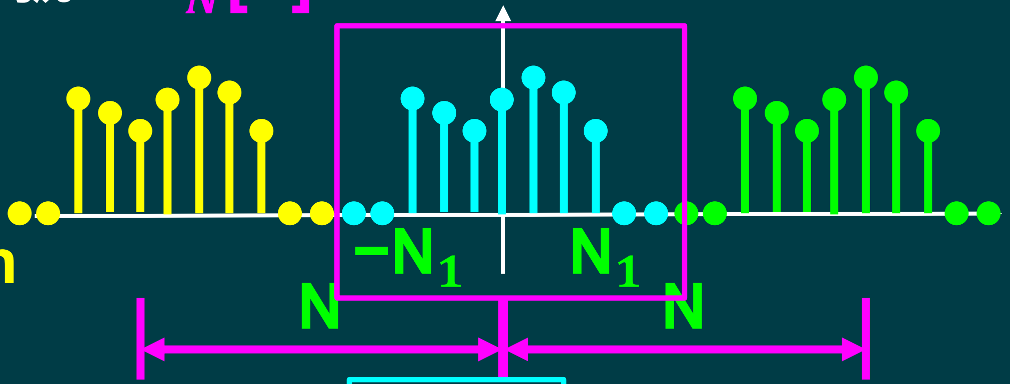
- 假設一個 **非週期** 的信號：$x[n]$
- 然後，**複製成**一個 **週期性** 的信號：$x_N[n]$



# 非週期信號的表示式

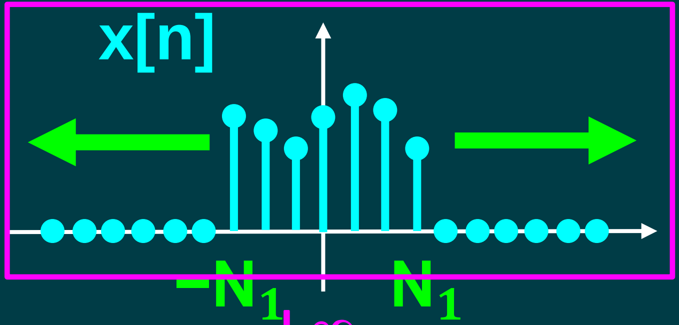
- 針對這個 週期性 的信號：$x_N[n]$
- 它的傅立葉級數為：

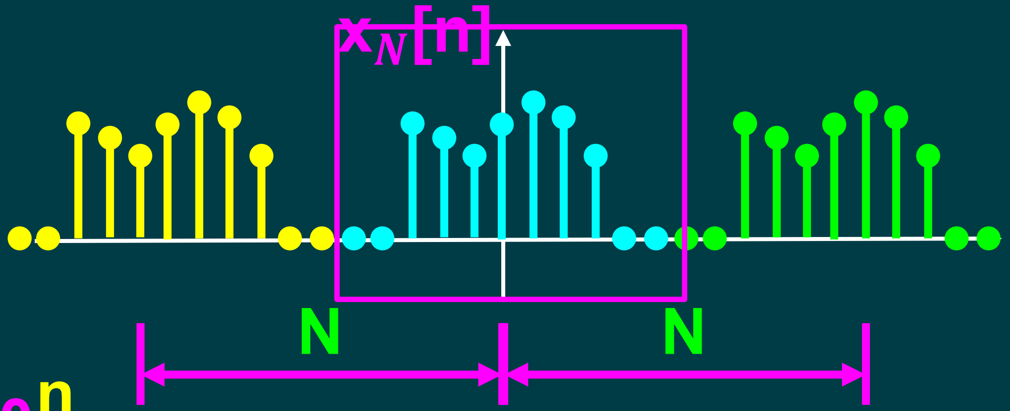



$$x_N[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \, e^{jkw_0 n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \boxed{\sum_{n=\langle N\rangle}} x_N[n] \, e^{-jkw_0 n} = \frac{1}{N} \boxed{\sum_{n=-N_1}^{N_1}} x_N[n] \, e^{-jkw_0 n}$$

# 非週期信號的表示式




$$= \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-jkw_0 n}$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} \boxed{x[n]}\, e^{-jkw_0 n} = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} \boxed{x_N[n]}\, e^{-jkw_0 n}$$

# 非週期信號的表示式

- 接著，定義：$X(e^{j\boxed{w}}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\boxed{w}n}$
- 則：

$w = k w_0$

$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{j\boxed{k w_0}})$$

$$a_k = \frac{1}{N} \boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\boxed{k w_0}n}}$$

# 非週期信號的表示式

- 接著，定義：$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-jwn}$
- 則：$w = k w_0$
- 因此：$a_k = \boxed{\frac{1}{N} X(e^{jkw_0})}$

$$x_N[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} \boxed{a_k}\, e^{jkw_0 n} = \sum_{k=\langle N\rangle} \frac{1}{N} X(e^{jkw_0})\, e^{jkw_0 n}$$

# 非週期信號的表示式

$N \rightarrow \infty$

$w_0 \rightarrow 0$

$w_0 = dw$

$k w_0 = w$

- 因為：

$w_0 = \frac{2\pi}{N}$

$\frac{1}{N} = \frac{1}{2\pi} w_0$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{jw})\, e^{jwn}\, dw$$

$$x_N[n] = \frac{1}{2\pi} \boxed{\sum_{k=\langle N \rangle}} X(e^{j\boxed{kw_0}})\, e^{j\boxed{kw_0}n}\, \boxed{w_0}$$

$$\boxed{N w_0 = 2\pi}$$

$$x_N[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} \boxed{\frac{1}{N}} X(e^{jkw_0})\, e^{jkw_0 n}$$

# 非週期信號的表示式

$$\boxed{x[n]} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \boxed{X(e^{jw})}\,\boxed{e^{jwn}}\,dw$$

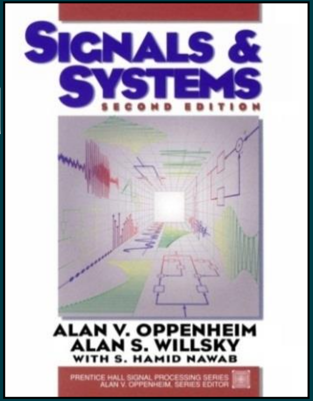
- 剛剛定義的：$\boxed{X(e^{jw})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \boxed{x[n]}\,\boxed{e^{-jwn}}$

- 這組關係式，就是 **傅立葉轉換** 的關係式。

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{FT}} X(e^{jw})$$

# 參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997




- SciLab:
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/