從信號與系統到控制

單元：CT-FT系統-5

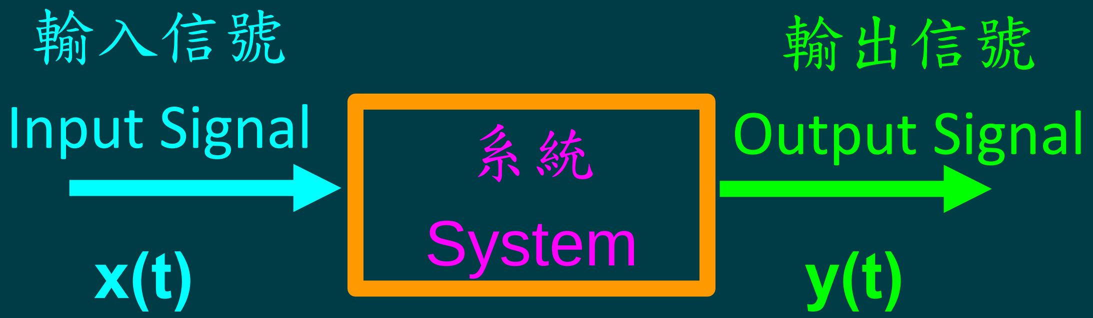
利用 傅立葉轉換 分析 微分方程式

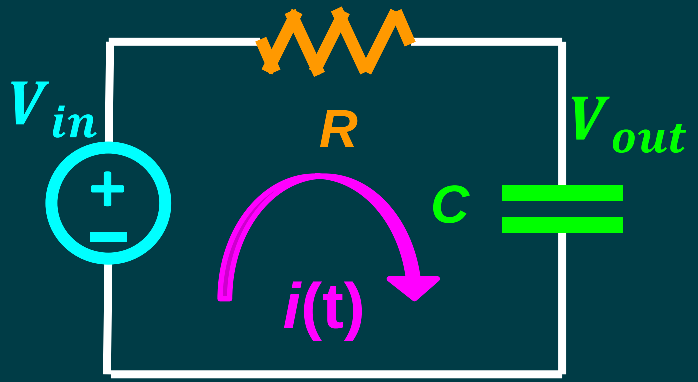
授課老師：連　豐　力

單元學習目標與大綱

- 討論 如何利用 傅立葉轉換
- 分析 一階 與 二階 微分方程式

系統與微分方程式：電路的範例



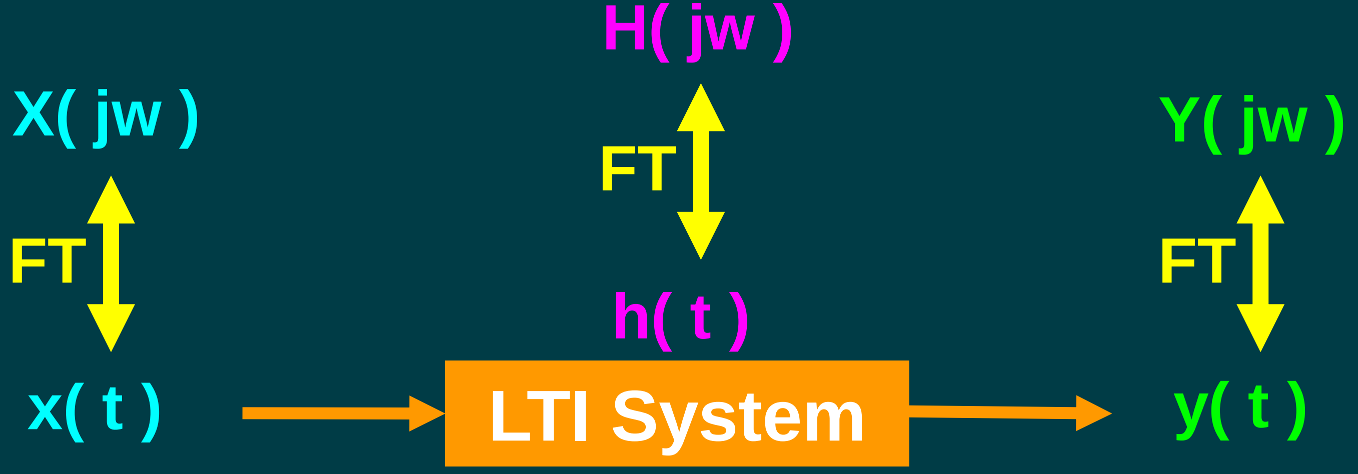


$$\frac{dy(t)}{dt} + a\ y(t) = b\ x(t)$$

$$i(t) = \frac{V_{in}(t) - V_{out}(t)}{R}$$

$$i(t) = C\frac{dV_{out}(t)}{dt}$$

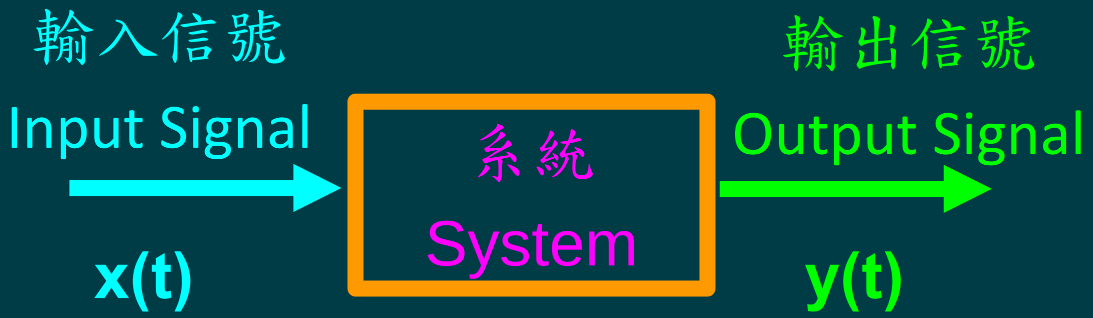
系統輸入輸出 與 傅立葉轉換 的關係

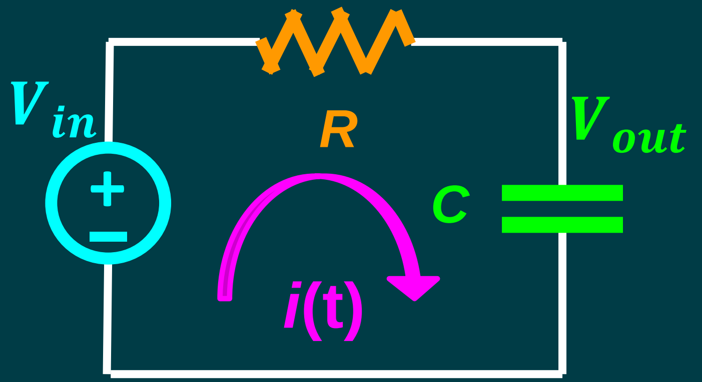


$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$Y(jw) = X(jw) \cdot H(jw)$$

系統微分方程式 與 傅立葉轉換





$$\frac{dy(t)}{dt} + a\ y(t) = b\ x(t)$$

$$i(t) = \frac{V_{in}(t) - V_{out}(t)}{R}$$

$$Y(jw) = X(jw) \bullet H(jw)$$

$$i(t) = C\frac{d\,V_{out}(t)}{dt}$$

一階 微分方程 的系統

$$\mathcal{F}\left\{ \frac{dy(t)}{dt} + a\ y(t) \right\} = \mathcal{F}\left\{ b\ x(t) \right\}$$

$$\mathcal{F}\left\{ \boxed{\frac{dy(t)}{dt}} \right\} + \mathcal{F}\left\{ \boxed{a}\ y(t) \right\} = \mathcal{F}\left\{ \boxed{b}\ x(t) \right\}$$

$$jw\ Y(jw) + a \boxed{\mathcal{F}\left\{ y(t) \right\}} = b\ \boxed{\mathcal{F}\left\{ x(t) \right\}}$$

$$jw\ Y(jw) + a\ Y(jw) = b\ X(jw)$$

$$\frac{d}{dt} x(t) \xleftrightarrow{FT} jw\ X(jw)$$

一階 微分方程 的系統

$$jw\,\boxed{Y(jw)} + a\,\boxed{Y(jw)} = b\,X(jw)$$

$$Y(jw)\,\boxed{(jw + a)} = \boxed{b}\,X(jw)$$

$$H(jw) = \frac{Y(jw)}{X(jw)} = \frac{\boxed{b}}{\boxed{(jw + a)}}$$

$$h(t) = b\,e^{-at}u(t)$$

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{(a + jw)}$$

二階 微分方程 的系統

$$\mathcal{F}\left\{\boxed{\frac{d^2\, y(t)}{d^2\, t}} + 4\boxed{\frac{d\, y(t)}{d\, t}} + \boxed{3\ y(t)}\right\} = \mathcal{F}\left\{\boxed{\frac{d\, x(t)}{d\, t}} + \boxed{2\, x(t)}\right\}$$

$$(jw)^2\, Y(jw) + 4\,(jw)\, Y(jw) + 3\, Y(jw)$$

$$= (jw)\, X(jw) + 2\, X(jw)$$

$$\frac{d}{dt}\, x(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} (jw)\, X(jw)$$

$$\frac{d^2}{d^2 t}\, x(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} (jw)^2\, X(jw)$$

二階 微分方程 的系統

$$(jw)^2 \boxed{Y(jw)} + 4(jw)\boxed{Y(jw)} + 3\boxed{Y(jw)} = (jw)\boxed{X(jw)} + 2\boxed{X(jw)}$$

$$Y(jw)\boxed{\left[(jw)^2 + 4(jw) + 3\right]} = X(jw)\boxed{\left[(jw) + 2\right]}$$

$$H(jw) = \frac{Y(jw)}{X(jw)} = \frac{((jw)+2)}{\boxed{((jw)^2 + 4(jw) + 3)}}$$

$$= \frac{((jw)+2)}{((jw)+1)((jw)+3)}$$

二階 微分方程 的系統

$$H(jw) = \frac{(jw + 2)}{(jw + 1)(jw + 3)}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{(jw + 1)} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(jw + 3)}$$

$$h(t) = \frac{1}{2} e^{-1t}\,u(t) + \frac{1}{2} e^{-3t}\,u(t)$$

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{(a + jw)}$$

系統微分方程式 與 傅立葉轉換

輸入信號 h(t) / H(jw) 輸出信號

Input Signal → 系統 System → Output Signal

x(t) / X(jw) y(t) / Y(jw)

- 不用解微積分
- 只用傅立葉轉換關係
- 以及多項式運算

$$\frac{dy(t)}{dt} + a\,y(t) = b\,x(t)$$

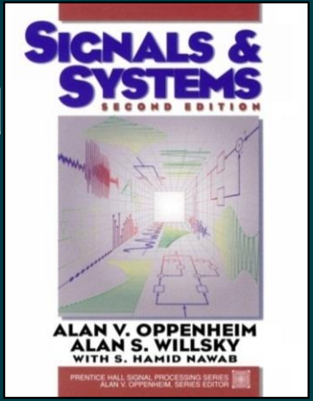
$$\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{FT} (jw)\,X(jw)$$

$$jw\,Y(jw) + a\,Y(jw) = b\,X(jw)$$

$$H(jw) = \frac{Y(jw)}{X(jw)} = \frac{b}{(jw + a)}$$

$$h(t) = b\,e^{-at}\,u(t)$$

參考文獻



- **Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid**
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997

- **SciLab:**
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/