從信號與系統到控制

單元：CT-FT系統-2

範例 - 系統輸入輸出 與 響應函數 的計算

授課老師： 連　豐　力

單元學習目標與大綱

- 以一個範例來說明，
- 如何利用 傅立葉轉換 的關係式，
- 幫助分析 一個系統本身 的 響應，
- 以及 輸入信號 與 輸出信號 之間的關係

系統輸入輸出 與 摺積計算 的關係

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI}}_{\,h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$h(t) = e^{-at}\,u(t) \qquad a > 0$$

$$x(t) = e^{-bt}\,u(t) \qquad b > 0$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

系統輸入輸出 與 摺積計算 的關係

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow y(t)$$

$h(t)$

$$h(t) = e^{-at}u(t) \quad a > 0 \quad \xleftrightarrow{\text{FT}} \quad H(jw) = \frac{1}{(a + jw)}$$

$$x(t) = e^{-bt}u(t) \quad b > 0 \quad \xleftrightarrow{\text{FT}} \quad X(jw) = \frac{1}{(b + jw)}$$

$$\mathcal{F}\left\{ e^{-at}u(t) \right\} = \frac{1}{(a + jw)}$$

系統輸入輸出 與 摺積計算 的關係

$$x(t) \longrightarrow \underset{h(t)}{\boxed{\text{LTI}}} \longrightarrow y(t)$$

$$h(t) = e^{-at}u(t) \quad a > 0 \quad \xleftrightarrow{\text{FT}} \quad H(jw) = \frac{1}{(a + jw)}$$

$$x(t) = e^{-bt}u(t) \quad b > 0 \quad \xleftrightarrow{\text{FT}} \quad X(jw) = \frac{1}{(b + jw)}$$

$$Y(jw) = X(jw) \bullet H(jw) = \frac{1}{(b + jw)} \bullet \frac{1}{(a + jw)}$$

系統輸入輸出 與 摺積計算 的關係

$$Y(jw) = \frac{1}{(b + jw)} \cdot \frac{1}{(a + jw)} \qquad \mathcal{F}\{ e^{-at} u(t) \} = \frac{1}{(a + jw)}$$

如果 $a \neq b$

$$= \frac{1}{(b - a)} \left[\boxed{\frac{1}{(a + jw)}} - \boxed{\frac{1}{(b + jw)}} \right]$$

$$y(t) = \frac{1}{(b - a)} \left[e^{-at} u(t) - e^{-bt} u(t) \right]$$

系統輸入輸出 與 摺積計算 的關係

$$Y(jw) = \frac{1}{(b + jw)} \cdot \frac{1}{(a + jw)}$$

如果 $a = b$

$$= \frac{1}{(a + jw)^{\boxed{2}}}$$

$$\mathcal{F}\{\ \boxed{t^{n-1}}\, e^{-at}\ u(t)\ \} = \frac{1}{(a + jw)^{\boxed{n}}}$$

$$y(t) = t^{1}\ e^{-a\,t}\ u(t)$$

系統輸入輸出 與 摺積計算 的關係

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow y(t)$$

$h(t)$

$$H(jw) = \frac{1}{(a + jw)}$$

$$X(jw) = \frac{1}{(b + jw)}$$

$$Y(jw) = X(jw) \bullet H(jw)$$

$$\text{FT} \updownarrow$$

$y(t)$

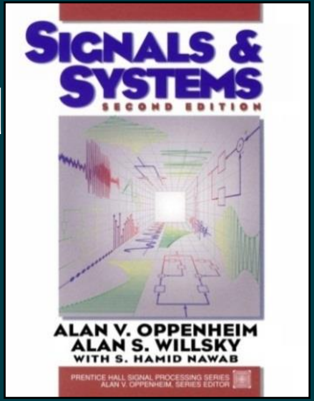
$a \neq b$

$$= \frac{1}{(b-a)} \left[e^{-at} - e^{-bt} \right] u(t)$$

$$= t\, e^{-at}\, u(t)$$

$a = b$

參考文獻



- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997

- SciLab:
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/