從信號與系統到控制

單元：CT-FT性質-5

連續時間 傅立葉轉換 的 擴張與壓縮性質

授課老師：連　豐　力

單元學習目標與大綱

- 根據 傅立葉轉換 關係式，有下面的性質：

- 線性組合
- 時間軸的平移
- 共軛關係式
- 微分與積分
- 時間軸與頻率軸的擴張與壓縮

傅立葉轉換 的 表示式

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(jw) \qquad e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{(a+jw)}$$

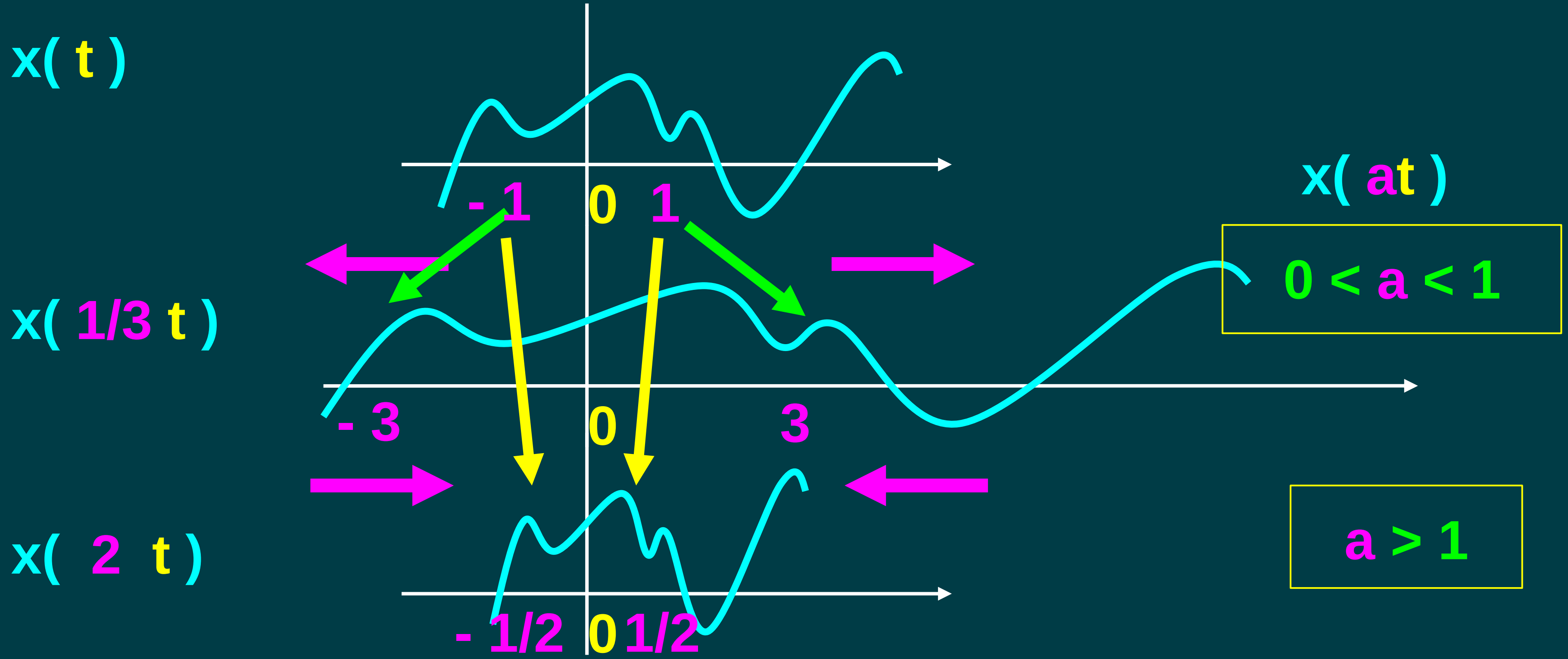
$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jwt}\, dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, e^{jwt}\, dw$$

$$X(jw) = \mathcal{F}\{\, x(t) \,\} \qquad \mathcal{F}\{\, e^{-at}u(t) \,\} = \frac{1}{(a+jw)}$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\, X(jw) \,\} \qquad \mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{1}{(a+jw)} \right\} = e^{-at}u(t)$$

信號在時間軸的變形- 擴張與壓縮



時間軸 與 頻率軸 的 擴張與壓縮 關係

- 如果有一個信號：x(t)

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(jw)$$

$$x(at) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{jw}{a}\right)$$

$$\frac{1}{|b|} x\left(\frac{t}{b}\right) \xleftrightarrow{FT} X(bjw)$$

$$x(-t) \xleftrightarrow{FT} X(-jw)$$

時間軸 的 擴張與壓縮 關係

$$x(\boxed{t}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, e^{jw\boxed{t}}\, dw$$

$$t = as$$

$$x(as) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, e^{jw\,as}\, dw$$

時間軸 的 擴張與壓縮 關係

$$x(as) = \frac{1}{2\pi} \int_{\boxed{-\infty}}^{\boxed{\infty}} X(\boxed{jw})\, e^{j\boxed{w\,as}}\, \boxed{dw}$$

$a > 0$

$$aw = r \qquad w = \frac{r}{a} \qquad dw = \frac{1}{a} dr$$

$$x(as) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\frac{r}{a})\, e^{j\,r\,s} \boxed{\frac{1}{a}} dr$$

$$x(as) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} X(j\frac{r}{a})\, e^{j\,r\,s}\, dr$$

時間軸 的 擴張與壓縮 關係

$$x(a\boxed{s}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a}X\left(j\frac{\boxed{r}}{a}\right)e^{jr\boxed{s}}\,\boxed{dr}$$

$s \rightarrow t \qquad r \rightarrow w$

$$\boxed{x(at)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boxed{\frac{1}{a}X\left(j\frac{w}{a}\right)}e^{jwt}\,dw$$

$$\boxed{\boxed{x(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boxed{X(jw)}e^{jwt}\,dw}$$

時間軸 的 擴張與壓縮 關係

$$x(as) = \frac{1}{2\pi}\int_{\boxed{-\infty}}^{\boxed{\infty}} X(\boxed{jw})\, e^{j\boxed{w\,as}}\, \boxed{dw}$$

$a < 0$ $\quad aw = r \quad w = \frac{r}{a} \quad dw = \frac{1}{a}dr$

$$x(as) = \frac{1}{2\pi}\int_{\boxed{+\infty}}^{\boxed{-\infty}} X(j\frac{r}{a})\, e^{j\,r\,s}\, \frac{1}{a}dr$$

$$x(as) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{a} X(j\frac{r}{a})\, e^{j\,r\,s}\, dr$$

時間軸 的 擴張與壓縮 關係

$$x(a\boxed{s}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} X\left(j\frac{\boxed{r}}{a}\right) e^{jr\boxed{s}}\,\boxed{dr}$$

$$s \rightarrow t \qquad r \rightarrow w$$

$$\boxed{x(at)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \boxed{\frac{1}{a} X\left(j\frac{w}{a}\right)} e^{jwt}\,dw$$

$$\boxed{\boxed{x(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \boxed{X(jw)}\, e^{jwt}\,dw}$$

時間軸 的 擴張與壓縮 關係

$\boxed{a > 0}$

$$\boxed{x(at)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \boxed{\boxed{\frac{1}{a}} X\left(j\frac{w}{a}\right)} e^{jwt}\, dw$$

$\boxed{a < 0}$

$$\boxed{x(at)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \boxed{\boxed{-\frac{1}{a}} X\left(j\frac{w}{a}\right)} e^{jwt}\, dw$$

$$\boxed{x(at)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \boxed{\boxed{\frac{1}{|a|}} X\left(j\frac{w}{a}\right)} e^{jwt}\, dw$$

時間軸 與 頻率軸 的 擴張與壓縮 關係

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(jw)$$

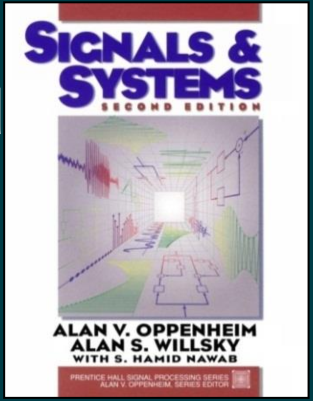
$$x(at) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{jw}{a}\right)$$

$$\frac{1}{|b|} x\left(\frac{t}{b}\right) \xleftrightarrow{FT} X(bjw)$$

$$x(-t) \xleftrightarrow{FT} X(-jw)$$

參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid Nawab,
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- SciLab:
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/