

# 從信號與系統到控制

## 單元：CT-FT性質-4

### 連續時間 傅立葉轉換 的 微分與積分性質

授課老師：連 豐 力

# 單元學習目標與大綱

- 根據 傅立葉轉換 關係式，有下面的性質：
- 線性組合
- 時間軸的平移
- 共軛關係式
- 微分與積分
- 時間軸與頻率軸的擴張與壓縮

# 傅立葉轉換 的 表示式

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(j\omega) \quad e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{(a + j\omega)}$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} \quad \mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{(a + j\omega)}$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\} \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(a + j\omega)}\right\} = e^{-at}u(t)$$

# 微分與積分的關係式

- 如果有一個信號： $x(t)$

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(j\omega)$$

$$\frac{d}{dt} x(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} j\omega X(j\omega)$$

$$\int_{-\infty}^t x(s) ds \xleftrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(j0) \delta(\omega)$$

# 微分的關係式

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} x(t) &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \boxed{e^{j\omega t}} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \boxed{\frac{d}{dt} e^{j\omega t}} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) j\omega e^{j\omega t} d\omega\end{aligned}$$

# 微分的關係式

$$\boxed{\frac{d}{dt} x(t)} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

FT

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{X(j\omega) j\omega} e^{j\omega t} d\omega$$

$$\boxed{x(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{X(j\omega)} e^{j\omega t} d\omega$$

# 微分與積分的關係式

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(j\omega)$$

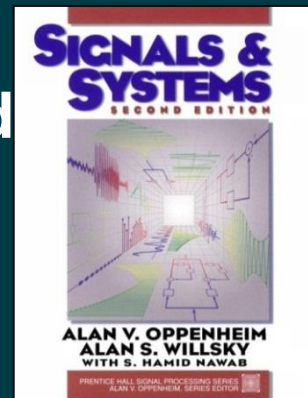
$$\frac{d}{dt} x(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} j\omega X(j\omega)$$

$$\int_{-\infty}^t x(s) ds \xleftrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(j0) \delta(\omega)$$

- 這是所有時間軸上的信號平均值
- 就是此信號在  $\omega=0$  的資訊量

# 參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid  
**Signals & Systems**,  
Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- **SciLab:**  
Open source software for numerical computation  
<http://www.scilab.org/>