

從信號與系統到控制

單元：CT-FT性質-2

連續時間 傅立葉轉換 的 平移性質

授課老師：連 豐 力

單元學習目標與大綱

- 根據 傅立葉轉換 關係式，有下面的性質：
- 線性組合
- 時間軸的平移
- 共軛關係式
- 微分與積分
- 時間軸與頻率軸的擴張與壓縮

傅立葉轉換 的 表示式

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(j\omega) \quad e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{(a + j\omega)}$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

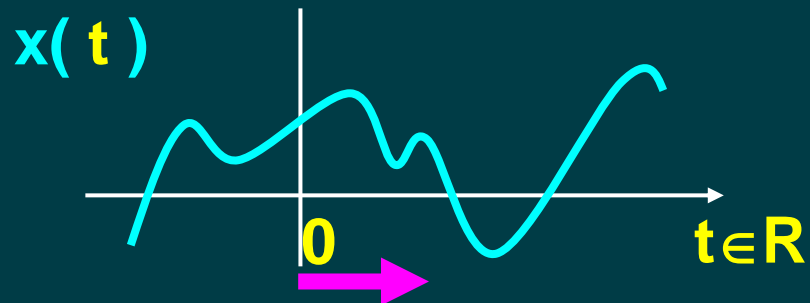
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} \quad \mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{(a + j\omega)}$$

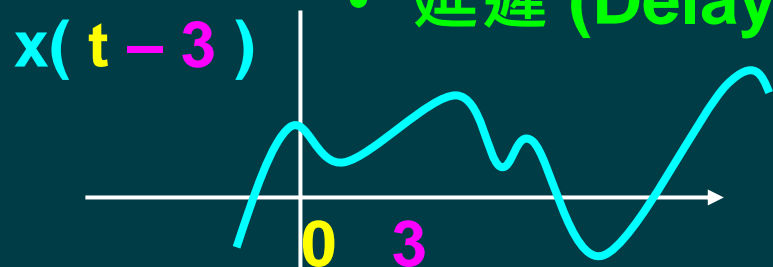
$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\} \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(a + j\omega)}\right\} = e^{-at}u(t)$$

信號在時間軸的平移

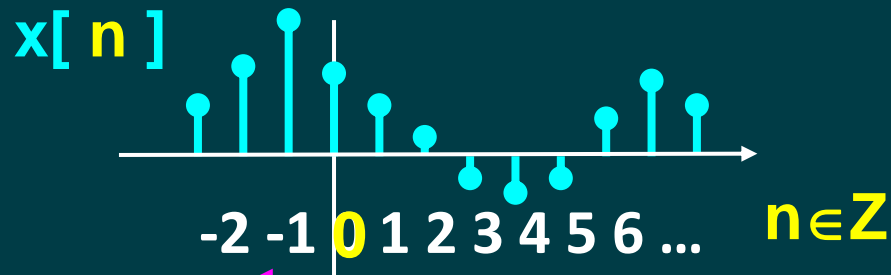
- 連續時間信號 (CT)



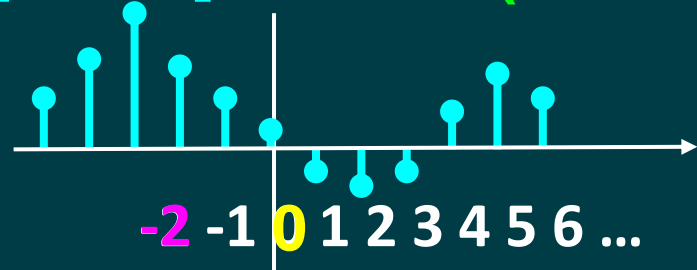
- 延遲 (Delay)



- 離散時間信號 (DT)



- 超前 (Advance)



時間軸上平移的關係式

- 如果有一個信號： $x(t)$

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(j\omega)$$

$$x(t - a) \xleftrightarrow{\text{FT}} e^{j\omega(-a)} X(j\omega)$$
$$e^{-j\omega a} X(j\omega)$$

時間軸上平移的關係式

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x(t-a)) e^{-j\omega t} dt$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$t - a = s \quad t = s + a \quad dt = ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{-j\omega(s+a)} ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{-j\omega s} e^{-j\omega a} ds$$

時間軸上平移的關係式

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x(t - a)) e^{-j\omega t} dt$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{-j\omega s} e^{-j\omega a} ds$$

$$= e^{-j\omega a} \int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{-j\omega s} ds$$

$$= e^{-j\omega a} X(j\omega)$$

時間軸上平移的關係式

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\boxed{x(t - a)}) e^{-j\omega t} dt$$

$$\boxed{X(j\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{x(t)} e^{-j\omega t} dt$$

FT



$$= \boxed{e^{-j\omega a} X(j\omega)}$$

時間軸上平移的關係式

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(j\omega)$$

$$x(t - a) \xleftrightarrow{\text{FT}} e^{j\omega(-a)} X(j\omega)$$

$$\left| e^{-j\omega a} \right| = \left| \cos(-\omega a) + j \sin(-\omega a) \right| \quad \boxed{e^{-j\omega a}} X(j\omega)$$

$$= 1$$

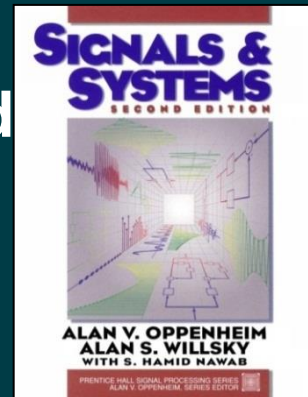
• 平移不會改變 $X(j\omega)$ 的強度大小

$$\angle e^{-j\omega a} = -\omega a$$

• 平移會改變 $X(j\omega)$ 的相位大小

參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
Signals & Systems,
Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- **SciLab:**
Open source software for numerical computation
<http://www.scilab.org/>