

從信號與系統到控制

單元：CT-FT性質-1

連續時間 傅立葉轉換 的 線性 性質

授課老師：連 豐 力

單元學習目標與大綱

- 根據 傅立葉轉換 關係式，有下面的性質：
- 線性組合
- 時間軸的平移
- 共軛關係式
- 微分與積分
- 時間軸與頻率軸的擴張與壓縮

傅立葉轉換 的 表示式

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(j\omega) \quad e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} \frac{1}{(a + j\omega)}$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} \quad \mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{(a + j\omega)}$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\} \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(a + j\omega)}\right\} = e^{-at}u(t)$$

線性組合的關係

- 如果有兩個信號： $x(t)$ 與 $y(t)$

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(j\omega)$$

$$y(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} Y(j\omega)$$

$$a x(t) + b y(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} a X(j\omega) + b Y(j\omega)$$

線性組合的關係

$$\int_{-\infty}^{\infty} (a x(t) + b y(t)) e^{-j\omega t} dt$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (a x(t) e^{-j\omega t} + b y(t) e^{-j\omega t}) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} a x(t) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} b y(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt + b \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt = a X(j\omega) + b Y(j\omega)$$

線性組合的關係

$$\int_{-\infty}^{\infty} (a x(t) + b y(t)) e^{-j\omega t} dt$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

FT

$$= a X(j\omega) + b Y(j\omega)$$

線性組合的關係

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (a X(j\omega) + b Y(j\omega)) e^{j\omega t} d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (a X(j\omega) e^{j\omega t} + b Y(j\omega) e^{j\omega t}) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$= a \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega + b \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = a x(t) + b y(t)$$

線性組合的關係

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (a X(j\omega) + b Y(j\omega)) e^{j\omega t} d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

FT

$$= a x(t) + b y(t)$$

線性組合的關係

- 如果有兩個信號： $x(t)$ 與 $y(t)$

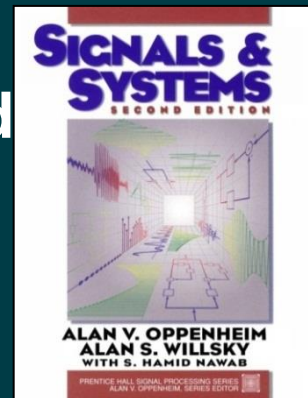
$$x(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(j\omega)$$

$$y(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} Y(j\omega)$$

$$a x(t) + b y(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} a X(j\omega) + b Y(j\omega)$$

參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
Signals & Systems,
Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- **SciLab:**
Open source software for numerical computation
<http://www.scilab.org/>