

從信號與系統到控制

單元：連續F轉換-7

週期信號的傅立葉轉換

授課老師：連 豐 力

單元學習目標與大綱

- 針對 週期性的信號
- 推導出 傅立葉轉換 的公式與關係式

傅立葉轉換 的 表示式

- 針對 非週期 的信號：

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(j\omega)$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- 那麼，針對 週期 信號，它的 傅立葉轉換 會是什麼呢？

週期信號的 傅立葉轉換 表示式

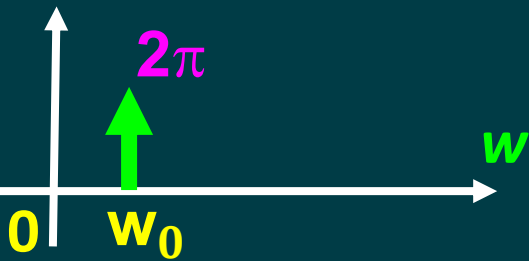
- 我們 先看一個 傅立葉轉換 後的函數：

$$X(j\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{\cancel{2\pi}} \cancel{2\pi} e^{j(\omega_0) t} = e^{j\omega_0 t}$$



週期信號的 傅立葉轉換 表示式

- 我們再看另一個 傅立葉轉換 後的函數：

$$X(j\omega) = 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\cancel{2\pi}} \cancel{2\pi} a_k e^{j(k\omega_0)t} = a_k e^{jk\omega_0 t} \end{aligned}$$

週期信號的 傅立葉轉換 表示式

- 所以，我們有下面的 傅立葉轉換 關係式：


$$x(t) = a_k e^{j k \omega_0 t} \xleftrightarrow{\text{FT}} X(j\omega) = 2\pi a_k \delta(\omega - k \omega_0)$$

- 針對一個週期信號，可以表示成 傅立葉級數 為：

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(j\omega)$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j k \omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k \omega_0)$$

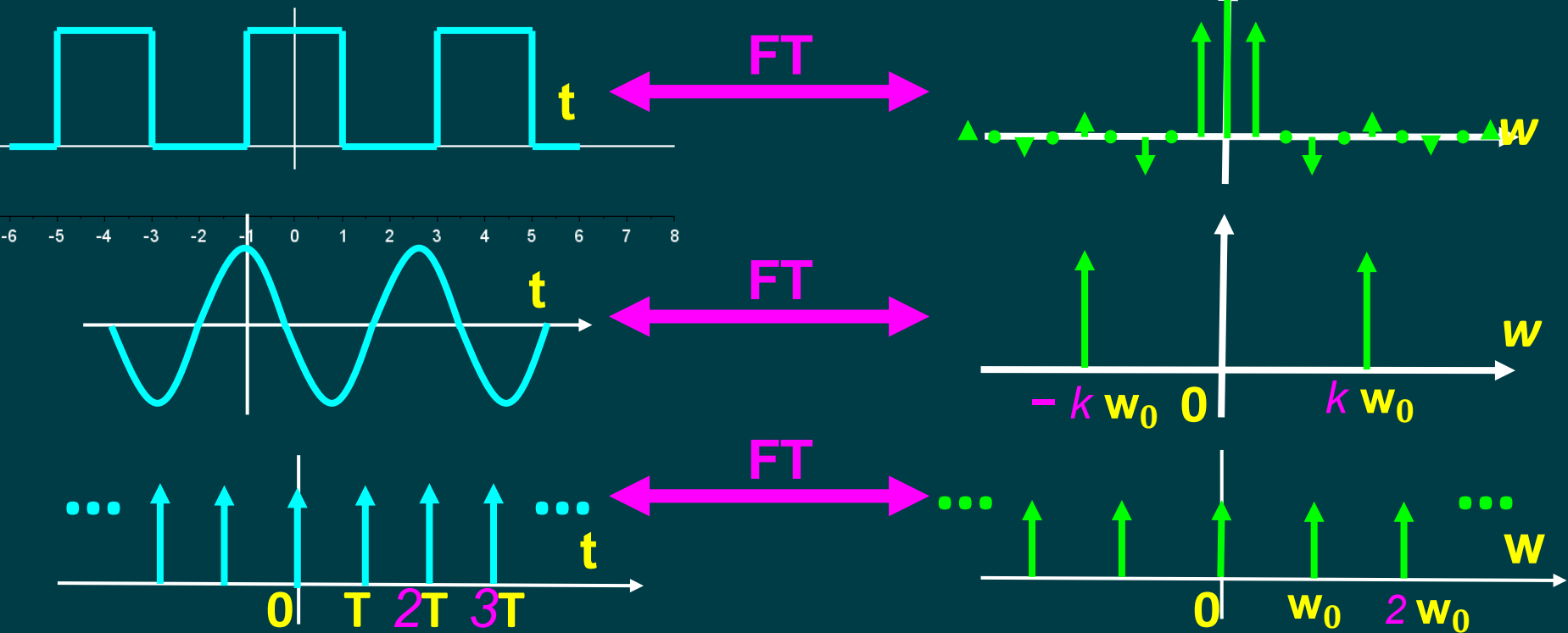
週期信號的 傅立葉轉換 表示式

- 所以，一個週期信號的 傅立葉轉換 的關係式：

$$\begin{aligned} x(t) &\xleftrightarrow{\text{FT}} X(j\omega) \\ &\stackrel{\text{FS}}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j k \omega_0 t} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k \omega_0) \end{aligned}$$


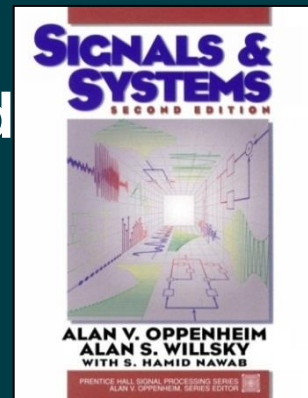
- 任意的週期信號

週期信號的 傅立葉轉換 表示式



參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
Signals & Systems,
Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- **SciLab:**
Open source software for numerical computation
<http://www.scilab.org/>