

從信號與系統到控制

單元：連續F轉換-4

傅立葉轉換 範例 - 雙邊指數函數

授課老師：連 豐 力

單元學習目標與大綱

- 根據 **傅立葉轉換** 的公式與關係式
- 計算 **雙邊指數函數** 的 **傅立葉轉換**
- 瞭解 **傅立葉轉換不存在** 的範例

傅立葉轉換 的 表示式

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(j\omega)$$

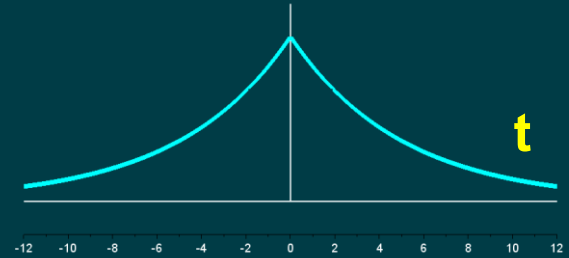
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

雙邊指數函數的傅立葉轉換

$$x(t) = e^{-a|t|} \quad a > 0$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$



$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt$$

$|t| = -t \quad -a(-t) = at$
 $|t| = +t \quad -a(+t) = -at$

$$= \int_{-\infty}^0 e^{+at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt$$

雙邊指數函數的傅立葉轉換

$$x(t) = e^{-a|t|} \quad a > 0$$

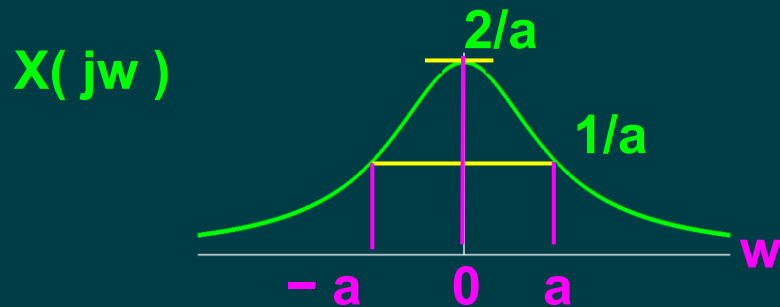
$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^0 e^{+at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{(a-j\omega)} e^{(a-j\omega)t} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{1}{-(a+j\omega)} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{(a-j\omega)} (1 - 0) + \frac{1}{-(a+j\omega)} (0 - 1) \end{aligned}$$

雙邊指數函數 的 傅立葉轉換

$$x(t) = e^{-a|t|} \quad a > 0$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{(a - j\omega)} \frac{(a + j\omega)}{(a + j\omega)} + \frac{1}{(a + j\omega)} \frac{(a - j\omega)}{(a - j\omega)}$$

$$= \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$



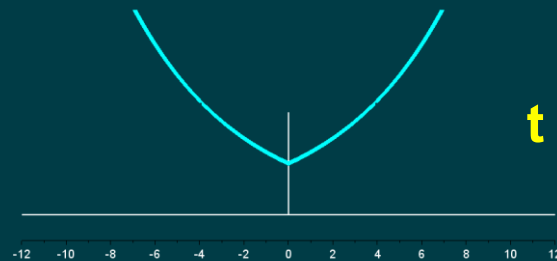
雙邊指數函數的傅立葉轉換

$$x(t) = e^{-a|t|} \quad a < 0$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^0 e^{+at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt$$



雙邊指數函數的傅立葉轉換

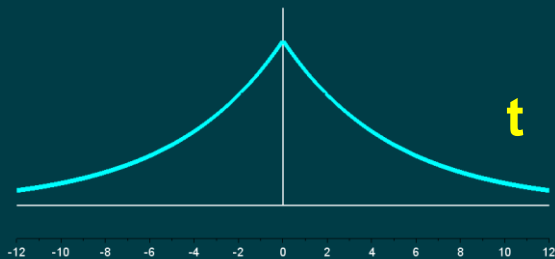
$$x(t) = e^{-a|t|} \quad a < 0$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^0 e^{+at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt$$
$$= \frac{1}{(a-j\omega)} e^{(a-j\omega)t} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{1}{-(a+j\omega)} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty}$$

- 此積分結果不存在
- 沒有傅立葉轉換

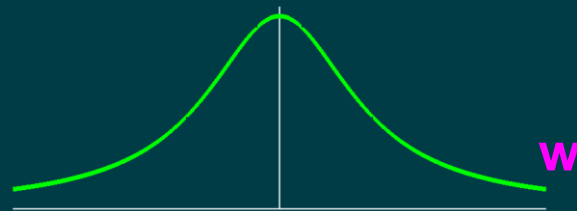
指數函數的傅立葉轉換

$$x(t) = e^{-a|t|} \quad a > 0$$

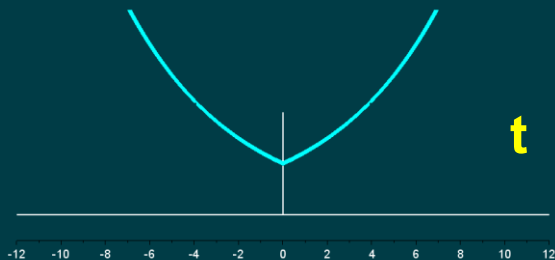


$$X(j\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

$X(j\omega)$



$$x(t) = e^{-a|t|} \quad a < 0$$



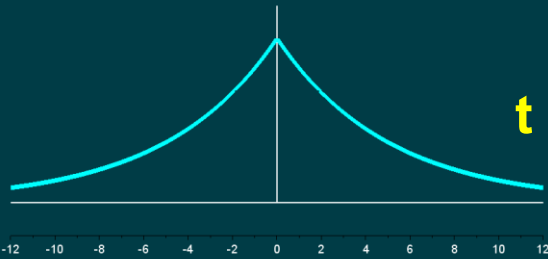
- 傅立葉轉換不存在

指數函數的傅立葉轉換

$$e^{-a|t|} \quad a > 0$$

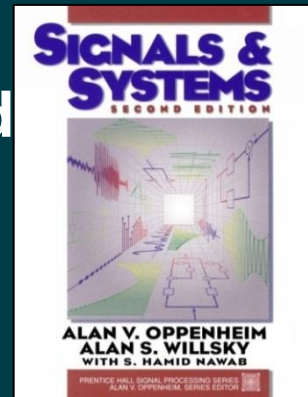


$$\frac{2a}{a^2 + w^2}$$



參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
Signals & Systems,
Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- **SciLab:**
Open source software for numerical computation
<http://www.scilab.org/>