從信號與系統到控制

單元：連續F轉換-2

從 傅立葉級數 到 傅立葉轉換

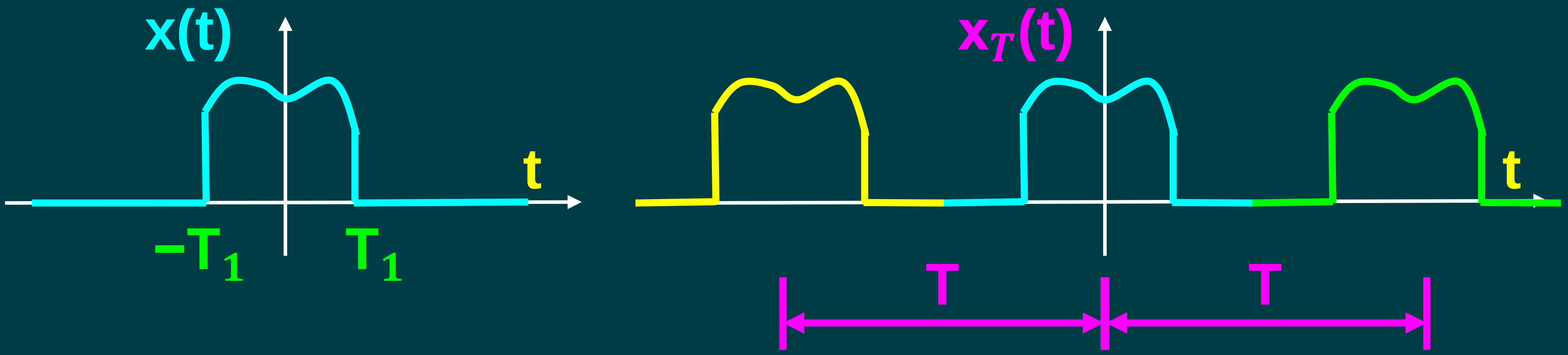
授課老師：連　豐　力

單元學習目標與大綱

- 推導出 傅立葉轉換 的公式與關係式
- 從 傅立葉級數 出發 進展到 傅立葉轉換
- 從 週期性的信號 到 非週期性的信號

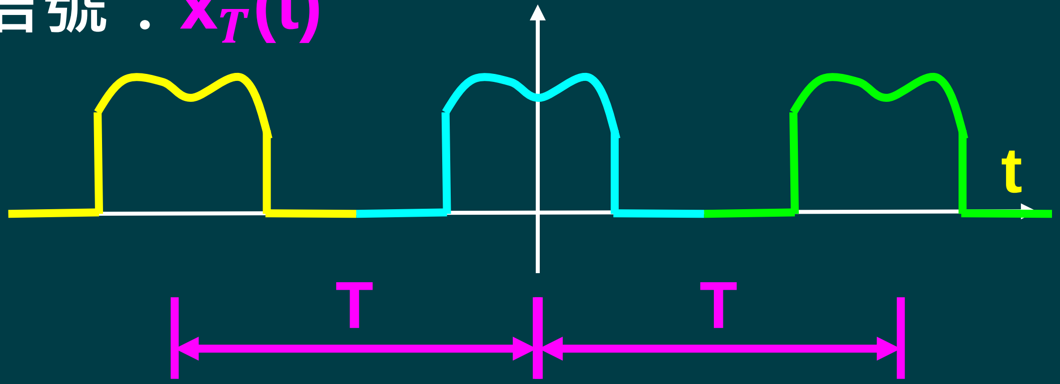
非週期信號的表示式

- 假設一個 非週期 的信號：x(t)
- 然後，複製成一個 週期性 的信號：$x_T(t)$



非週期信號的表示式

- 針對這個 週期性 的信號：$x_T(t)$

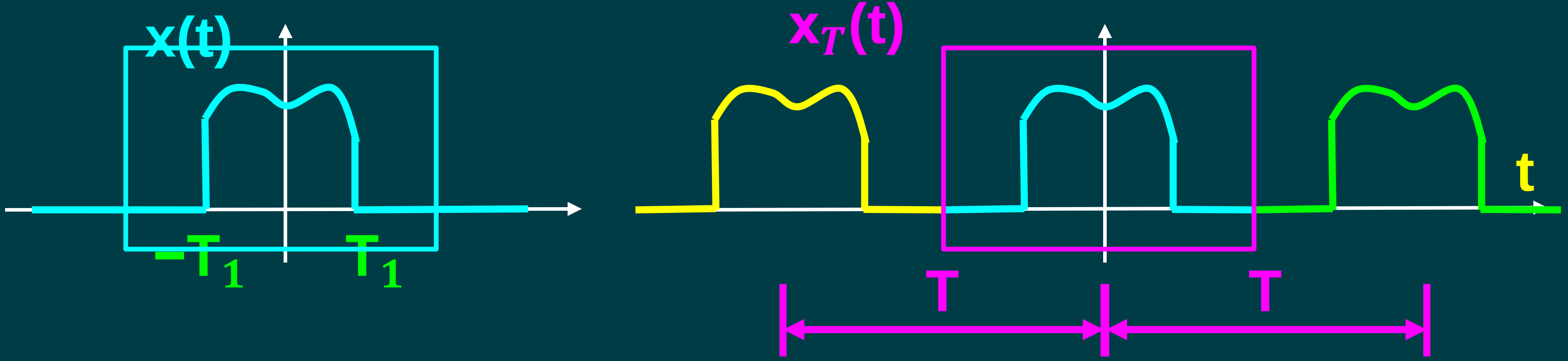


- 它的傅立葉級數為：

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, e^{jkw_0 t}$$

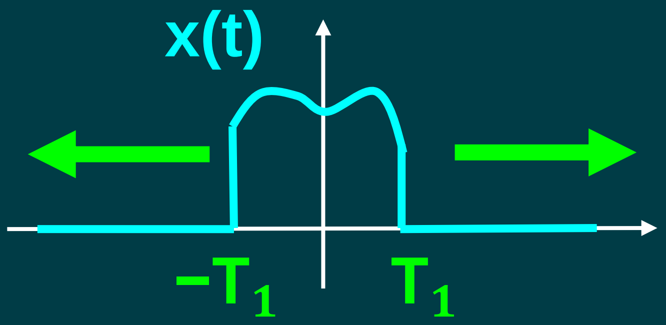
$$a_k = \frac{1}{T} \boxed{\int_T} x_T(t) \, e^{-jkw_0 t} \, dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) \, e^{-jkw_0 t} \, dt$$

非週期信號的表示式



$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \boxed{x(t)}\, e^{-jkw_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \boxed{x_T(t)}\, e^{-jkw_0 t}\, dt$$

非週期信號的表示式



$$a_k = \frac{1}{T}\int_{\boxed{-T/2}}^{\boxed{T/2}} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

非週期信號的表示式

- 接著，定義：$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jwt}\, dt$
- 則： $a_k = \frac{1}{T} X(j\boxed{k w_0})$

$$\boxed{a_k} = \frac{1}{T}\int_{\boxed{-T/2}}^{\boxed{T/2}} x(t)\, e^{-jkw_0 t}\, dt = \boxed{\frac{1}{T}}\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\boxed{kw_0}t}\, dt}$$

非週期信號的表示式

- 接著，定義：$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jwt}\, dt$

$$\boxed{a_k = \frac{1}{T} X(jkw_0)}$$

- 因此： $x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \boxed{a_k}\, e^{jkw_0 t}$

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X(jkw_0)\, e^{jkw_0 t}$$

非週期信號的表示式

$T \rightarrow \infty$

$w_0 \rightarrow 0$

$w_0 = dw$

$k w_0 = w$

- 因為：

$w_0 = \frac{2\pi}{T}$

$\frac{1}{T} = \boxed{\frac{1}{2\pi}}\boxed{w_0}$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}} X(j\boxed{w})\, e^{j\boxed{w}t}\boxed{dw}$$

$$\uparrow$$

$$x_T(t) = \boxed{\frac{1}{2\pi}}\boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}} X(j\boxed{kw_0})\, e^{j\boxed{kw_0}t}\boxed{w_0}$$

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \boxed{\frac{1}{T}} X(jkw_0)\, e^{jkw_0 t}$$

非週期信號的表示式

$$\boxed{x(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \boxed{X(jw)}\, e^{jwt}\, dw$$

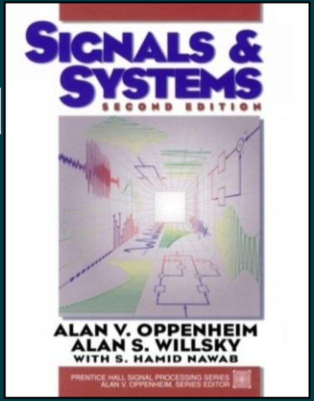
- 剛剛定義的：

$$\boxed{X(jw)} = \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{x(t)}\, e^{-jwt}\, dt$$

- 這組關係式，就是 傅立葉轉換 的關係式。

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(jw)$$

參考文獻



- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997

- SciLab:
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/