從信號與系統到控制

單元： DT-FS性質-4

離散時間 傅立葉級數 的 性質 – 相乘

授課老師： 連　豐　力

單元學習目標與大綱

- 討論 兩個信號 進行 相乘操作 之後，
  與對應的 傅立葉級數係數 之間 的關係

傅立葉級數 與 其係數 a_k

$$\boxed{w_0 = \frac{2\pi}{N}}$$

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{FS}} a_k$$

$$x[n] = \sum_{\boxed{k=\langle N\rangle}} \boxed{a_k}\,\boxed{e^{jkw_0 n}}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{\boxed{n=\langle N\rangle}} \boxed{x[n]}\, e^{-j\boxed{kw_0}n}$$

$$a_{k+rN} = a_k$$

信號相乘的關係

$$w_0 = \frac{2\pi}{N}$$

- 假設有兩個信號：x[n] 與 y[n]，週期都是 N
- 也就是，

$$x[n] \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k \qquad x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jkw_0 n}$$

$$y[n] \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k \qquad y[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} b_k e^{jkw_0 n}$$

信號相乘的關係

- 如果第三個信號：　$z[n] = x[n] \cdot y[n]$

- 則 $z[n]$ 的傅立葉級數係數為：c_k

$$z[n] \xleftrightarrow{FS} c_k$$

$$z[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} c_k e^{jkw_0 n}$$

$$c_k = \sum_{m=\langle N\rangle} a_m b_{k-m}$$

信號相乘的關係

$$z[n] = \boxed{x[n]} \cdot \boxed{y[n]}$$

$$= \left[\sum_{\boxed{k=\langle N \rangle}} a_k e^{jkw_0 n} \right] \cdot \left[\sum_{\boxed{k=\langle N \rangle}} b_k e^{jkw_0 n} \right]$$

$$= \left[\boxed{\sum_{m=\langle N \rangle}} a_m e^{jmw_0 n} \right] \cdot \left[\boxed{\sum_{r=\langle N \rangle}} b_r e^{jrw_0 n} \right]$$

$$= \sum_{m=\langle N \rangle} \sum_{r=\langle N \rangle} a_m \boxed{e^{j\boxed{m}w_0 n}} b_r \boxed{e^{j\boxed{r}w_0 n}}$$

$$= \sum_{m=\langle N \rangle} \sum_{r=\langle N \rangle} a_m b_r e^{j(m+r)w_0 n}$$

信號相乘的關係

$$z[n] = \sum_{m=<N>} \sum_{\boxed{r=<N>}} a_m \, b_{\boxed{r}} \, e^{j\boxed{(m+r)}w_0 n}$$

$$m + r = k \qquad r = k - m$$

$$= \boxed{\sum_{m=<N>}} \boxed{\sum_{k=<N>}} a_m \, b_{k-m} \, e^{j(k)w_0 n}$$

$$= \sum_{k=<N>} \boxed{\sum_{m=<N>} a_m \, b_{k-m}} \, e^{j(k)w_0 n}$$

$$= \sum_{k=<N>} \left[\sum_{m=<N>} a_m \, b_{k-m} \right] e^{j(k)w_0 n}$$

信號相乘的關係

$$z[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} \boxed{\left[\sum_{m=\langle N\rangle} a_m \, b_{k-m} \right]} e^{j(k)w_0 n}$$

$$z[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} \boxed{c_k} \, e^{jkw_0 n}$$

$$c_k = \sum_{m=\langle N\rangle} a_m \, b_{k-m}$$

- 也就是，c_k 是： a_k 與 b_k 的摺積計算操作

信號相乘的關係

$x[n] \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$

$$x[n] = \sum_{k=<N>} \boxed{a_k} e^{jkw_0 n}$$

$y[n] \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k$

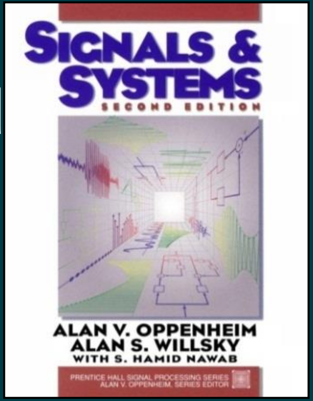
$$y[n] = \sum_{k=<N>} \boxed{b_k} e^{jkw_0 n}$$

$z[n] \overset{FS}{\longleftrightarrow} c_k$

$= x[n] \cdot y[n]$

$$= \sum_{m=<N>} a_m \, b_{k-m}$$

參考文獻



- **Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid**
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997

- **SciLab:**
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/