從信號與系統到控制

單元：離散F級數-3

離散時間 三角函數 的 傅立葉級數 - 公式

授課老師：連　豐　力

單元學習目標與大綱

- 討論 離散時間 三角函數 的 傅立葉級數
- 利用公式 求得 傅立葉級數 的係數

傅立葉級數 與 其係數 ak

$$w_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} \boxed{a_k} \boxed{e^{jkw_0 n}}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} \boxed{x[n]} \boxed{e^{-jkw_0 n}}$$

$$a_{k+rN} = a_k$$

$$x[n] \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$$

離散時間三角函數

$$x[n] = 1 + \sin\left(\frac{2\pi}{N} n\right) + 3\cos\left(\frac{2\pi}{N} n\right) + \cos\left(2\frac{2\pi}{N} n + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jkw_0 n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \boxed{x[n]} e^{-jkw_0 n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \left[1 + \sin\left(\frac{2\pi}{N} n\right) + 3\cos\left(\frac{2\pi}{N} n\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{N} n + \frac{\pi}{2}\right)\right] e^{-jkw_0 n}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

離散時間三角函數

$$w_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$a_{\boxed{k}} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \left[1+\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)+3\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{N}n+\frac{\pi}{2}\right)\right] e^{-j\boxed{k}w_0 n}$$

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \left[1+\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)+3\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{N}n+\frac{\pi}{2}\right)\right] \boxed{e^{-j0w_0 n}}$$

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \left[\ 1+\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)+3\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{N}n+\frac{\pi}{2}\right)\ \right]\ 1$$

多個複數的總和

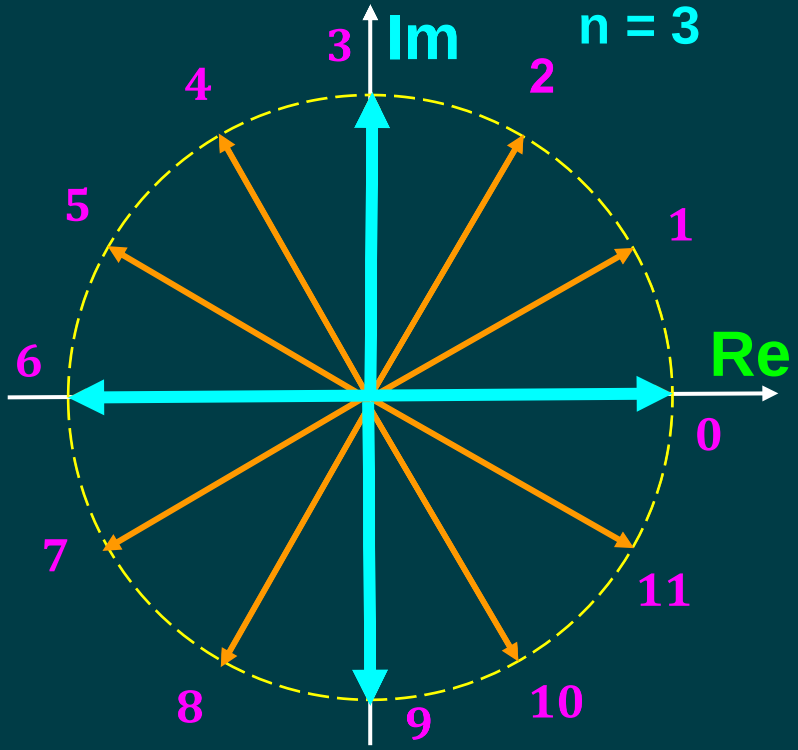
$$\sum_{k=0}^{N-1} \boxed{e^{jk\frac{2\pi}{N}}} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \boxed{e^{jk\frac{2\pi}{N}n}} = 0$$

$$e^{js} = \cos(s) + j\sin(s)$$

N = 12

n = 3



離散時間三角函數

$$a_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\left[\boxed{1}+\boxed{\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)+3\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{N}n+\frac{\pi}{2}\right)}\right]$$

$$= 0$$

$$\cos(s) = \frac{1}{2}\left(e^{js} + e^{-js}\right)$$

$$\sin(s) = \frac{1}{2j}\left(e^{js} - e^{-js}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}[1]$$

$$a_0 = \frac{1}{N}\;N$$

$$a_0 = 1$$

離散時間三角函數

$$w_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$a_{\boxed{k}} = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>}\left[1+\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)+3\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{N}n+\frac{\pi}{2}\right)\right]e^{-j\boxed{k}w_0 n}$$

$$a_1 = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>}\left[1+\boxed{\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)+3\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)}+\boxed{\cos\left(\frac{4\pi}{N}n+\frac{\pi}{2}\right)}\right]\boxed{e^{-j1w_0 n}}$$

$$\frac{2\pi}{N} = 1\,w_0 \qquad \frac{4\pi}{N} = 2\,w_0$$

$$\sum_{n=<N>} e^{j(k-m)w_0 n} = 0$$

離散時間三角函數

$$w_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\left[1+\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)+3\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{N}n+\frac{\pi}{2}\right)\right]e^{-jkw_0 n}$$

$$a_1 = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\left[1+\boxed{\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)+3\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)}+\boxed{\cos\left(\frac{4\pi}{N}n+\frac{\pi}{2}\right)}\right]\boxed{e^{-j1w_0 n}}$$

$$a_1 = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)+3\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)\right]e^{-j1w_0 n}$$

離散時間三角函數

$$w_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$a_1 = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{N} n\right) + 3\cos\left(\frac{2\pi}{N} n\right) \right] e^{-j1w_0 n}$$

$$= \left[\frac{1}{2j} + \frac{3}{2} \right]$$

- 計算過程，請參考：數學工具，
  有關 離散時間 三角函數與指數函數的總和 的計算過程

離散時間三角函數

$$w_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$a_{\boxed{k}} = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \left[1+\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)+3\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{N}n+\frac{\pi}{2}\right)\right] e^{-j\boxed{k}w_0 n}$$

$$a_2 = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \left[1+\boxed{\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)+3\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)}+\boxed{\cos\left(\frac{4\pi}{N}n+\frac{\pi}{2}\right)}\right]\boxed{e^{-j2w_0 n}}$$

$$\frac{2\pi}{N} = 1\,w_0 \qquad \frac{4\pi}{N} = 2\,w_0$$

$$a_2 = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \left[\qquad \cos\left(\frac{4\pi}{N}n+\frac{\pi}{2}\right)\right] e^{-j2w_0 n}$$

離散時間三角函數

$$w_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$a_2 = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} [\qquad \cos\left(\frac{4\pi}{N}n + \frac{\pi}{2}\right)] e^{-j2w_0 n}$$

$$a_2 = \quad \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

- 計算過程，請參考：數學工具，
  有關 離散時間三角函數與指數函數的總和 的計算過程

離散時間三角函數

$$a_0 = \boxed{1}$$

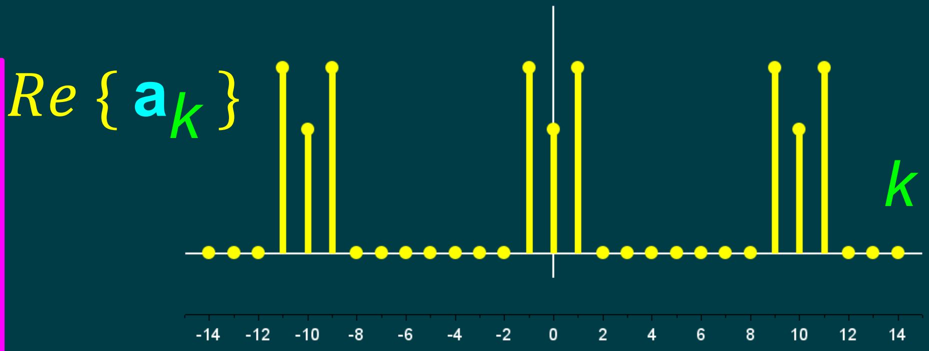
$$a_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2j} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}j$$

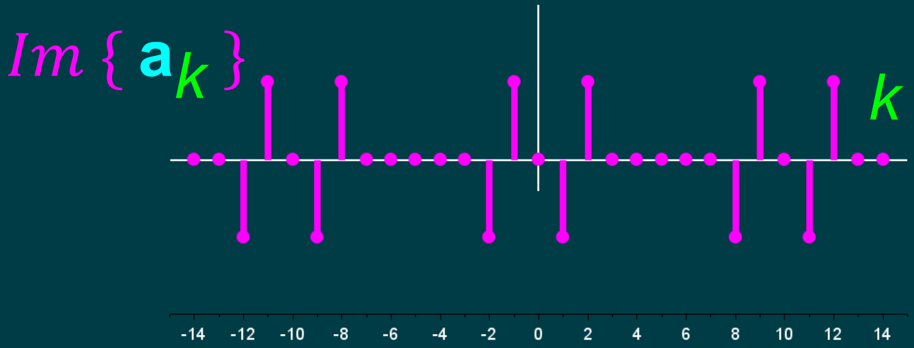
$$a_2 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}j$$

$$a_{-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2j} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}j$$

$$a_{-2} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}j$$

$$k \neq 0,\ \pm 1,\ \pm 2 \qquad a_k = 0$$





離散時間三角函數

$$x[n] = 1 + \sin(\frac{2\pi}{N} n) + 3\cos(\frac{2\pi}{N} n) + \cos(2\frac{2\pi}{N} n + \frac{\pi}{2})$$

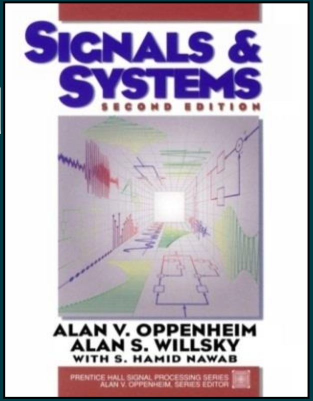
$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jkw_0 n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jkw_0 n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} [1+\sin(\frac{2\pi}{N} n)+3\cos(\frac{2\pi}{N} n)+\cos(\frac{4\pi}{N} n+\frac{\pi}{2})] e^{-jkw_0 n}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

參考文獻



- **Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid**
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997

- **SciLab:**
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/