從信號與系統到控制

單元：離散F級數-1

離散時間 週期信號 的 傅立葉級數

授課老師：連　豐　力

單元學習目標與大綱

- 介紹一組 離散時間信號 的 基底函數
- 建立 週期性信號 的 表示式
- 推導出 離散時間信號 的 傅立葉級數

離散時間週期信號的基底

$$w_0 = \frac{2\pi}{N}$$

- 對於離散時間週期信號，選用下面這組基底函數：

$$e^{j\,0\,w_0\,n} \quad e^{j\,1 w_0\,n} \quad e^{j\,2\,w_0\,n} \quad \ldots \quad e^{j\,(N-1)\,w_0\,n}$$

- 總共 N 項

$$\phi_k[n] = e^{j\,k w_0\,n} \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ , \ldots ,\ N\text{-}1$$

離散時間週期信號的基底

$$\boxed{w_0 = \frac{2\pi}{N}}$$

- 為什麼只選擇這 N個 基底函數呢？

$$\boxed{e^{j\,0\,w_0\,n}} \quad \boxed{e^{j\,1\,w_0\,n}} \quad e^{j\,2\,w_0\,n} \quad \cdots \quad e^{j\,(N-1)\,w_0\,n}$$

$= 1$

$$\boxed{\boxed{e^{j\,N\,w_0\,n}}} = e^{j\,\cancel{N}\,\frac{2\pi}{\cancel{N}}\,n} = e^{j\,n\,2\pi} \quad \boxed{=\ 1}$$

$$\boxed{e^{j\,(N+1)\,w_0\,n}} = e^{j(N\frac{2\pi}{N}n)+j(1\frac{2\pi}{N}n)}$$

$$= \boxed{e^{j(N\frac{2\pi}{N}n)}}\, e^{j(1\frac{2\pi}{N}n)} = e^{j(1\boxed{\frac{2\pi}{N}}n)}$$

離散時間週期信號的基底

$$w_0 = \frac{2\pi}{N}$$

- 所以，

$$\phi_{k+N}[n] = e^{j(k+N)w_0 n} = e^{jkw_0 n}\, e^{jNw_0 n}$$

$$= e^{jkw_0 n}\, \boxed{e^{jN\frac{2\pi}{N}n}} = e^{jkw_0 n} = \phi_k[n]$$

- 同理，

$$\phi_{k+rN}[n] = \phi_k[n]$$

離散時間週期信號的基底

- 然後，任意的離散時間週期信號，可以表示成：

$$x[n] = a_0 e^{j0w_0 n} + a_1 e^{j1w_0 n} + a_2 e^{j2w_0 n} + \dots + a_{N-1} e^{j(N-1)w_0 n}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \boxed{a_k} \boxed{e^{jkw_0 n}} = \boxed{\sum_{k=0}^{N-1}} a_k \phi_k[n]$$

$$\phi_k[n] = e^{jkw_0 n} \qquad \phi_{k+rN}[n] = \phi_k[n]$$

$$k = 0, 1, 2, , \dots , N\text{-}1 \qquad = \sum_{\boxed{k=<N>}} a_k \phi_k[n]$$

範例一

$$x[n] = \boxed{1} + \frac{1}{2}\boxed{\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)} + \boxed{\cos\left(\frac{4\pi}{N}n\right)}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}n} - e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{4\pi}{N}n} + e^{-j\frac{4\pi}{N}n}\right)$$

$e^{js} = \cos(s) + j\sin(s)$
$\cos(s) = \frac{1}{2}\left(e^{js} + e^{-js}\right)$
$\sin(s) = \frac{1}{2j}\left(e^{js} - e^{-js}\right)$

範例一

$$x[n] = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}n} - e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{4\pi}{N}n} + e^{-j\frac{4\pi}{N}n}\right)$$

$$= \boxed{1} + \frac{1}{4j}\boxed{e^{j\frac{2\pi}{N}n}} - \frac{1}{4j}\boxed{e^{-j\frac{2\pi}{N}n}} + \frac{1}{2}\boxed{e^{j\frac{4\pi}{N}n}} + \frac{1}{2}\boxed{e^{-j\frac{4\pi}{N}n}}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} a_k \, e^{jkw_0 n}$$

$$a_1 = \frac{1}{4j} \qquad a_2 = \frac{1}{2}$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{N} \qquad a_0 = 1 \qquad a_{-1} = -\frac{1}{4j} \qquad a_{-2} = \frac{1}{2}$$

如何決定係數 a*k*

$$w_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jkw_0 n}$$

$$x[n]\, e^{-jmw_0 n} = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jkw_0 n} e^{-jmw_0 n}$$

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-jmw_0 n} = \sum_{n=\langle N\rangle} \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jkw_0 n} e^{-jmw_0 n}$$

如何決定係數 a*k*

$$w_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-jmw_0 n} = \boxed{\sum_{n=\langle N\rangle}}\ \boxed{\sum_{k=\langle N\rangle}} a_k\, e^{j\boxed{k}w_0 n}\, e^{\boxed{-jm}w_0 n}$$

$$= \sum_{k=\langle N\rangle}\ \sum_{n=\langle N\rangle} \boxed{a_k}\ e^{j(k-m)w_0 n}$$

$$= \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \sum_{n=\langle N\rangle} e^{j(k-m)w_0 n}$$

如何決定係數 ak

$$\boxed{w_0 = \frac{2\pi}{N}}$$

$$\sum_{n=\langle N \rangle} e^{j\,(k-m)\boxed{w_0}n} = \sum_{n=\langle N \rangle} e^{j\,(k-m)\frac{2\pi}{N}n}$$

$k = m$

$$= \sum_{n=\langle N \rangle} \boxed{e^{j\,(0)\frac{2\pi}{N}n}}$$

$$= \sum_{n=\langle N \rangle} 1 = N$$

如何決定係數 ak

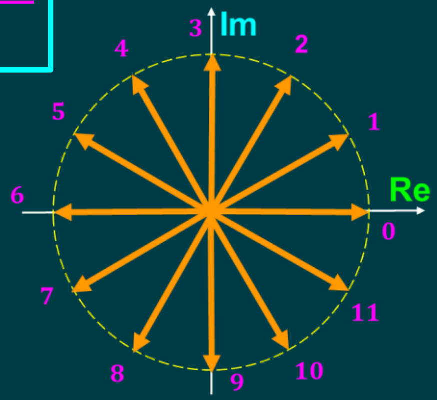
$$w_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$\sum_{n=\langle N\rangle} e^{j(k-m)w_0 n} = \sum_{n=\langle N\rangle} e^{j(k-m)\frac{2\pi}{N}n}$$

$$k \neq m \qquad = \sum_{\boxed{n=\langle N\rangle}} e^{j2\pi \boxed{\frac{(k-m)n}{N}}}$$

$$= 0$$

N = 12



如何決定係數 a*k*

$$w_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$\boxed{\sum_{n=<N>} x[n]\, e^{-jmw_0 n}} = \boxed{\sum_{k=<N>} a_k} \boxed{\sum_{n=<N>} e^{j(k-m)w_0 n}}$$

$$k = m \qquad = \quad N$$

$$k \neq m \qquad = \quad 0$$

$$= \boxed{a_m \qquad N}$$

$$a_m = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n]\, e^{-jmw_0 n}$$

傅立葉級數 與 其係數 a*k*

$$w_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k \, e^{jkw_0 n}$$

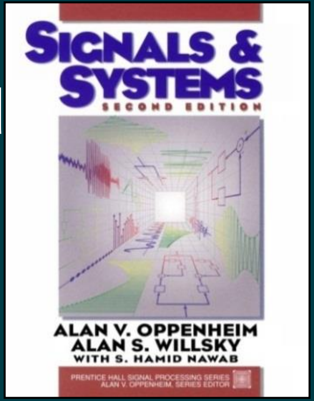
$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] \, e^{-jkw_0 n}$$

$$a_{k+rN} = a_k$$

$$x[n] \xleftrightarrow{FS} a_k$$

參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- SciLab:
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/