從信號與系統到控制

單元：CT-FS性質-6

連續時間 傅立葉級數 的 性質 – 微分

授課老師：連　豐　力

單元學習目標與大綱

- 討論 一個信號 針對 時間微分 之後，
  對應的 傅立葉級數係數 的變化

傅立葉級數 與 其係數 ak

$$w_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jkw_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t)\, e^{-jkw_0 t}\, dt$$

信號對時間的微分

$$w_0 = \frac{2\pi}{T}$$

- 假設有一個信號：x(t)，週期是 T

$$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k \qquad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jkw_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jkw_0 t}\, dt$$

- 那，

$$\frac{d}{dt}x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k = a_k \; jkw_0$$

信號對時間的微分

$$\frac{d}{dt}x(t) = \boxed{\frac{d}{dt}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\, e^{jkw_0 t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} a_k \boxed{e^{jkw_0 t}}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} jkw_0\, a_k\, e^{jkw_0 t}$$

信號對時間的微分

$$\boxed{\frac{d}{dt}x(t)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} jkw_0\ a_k\ e^{jkw_0 t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [\,jkw_0\ a_k\,]\ e^{jkw_0 t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \boxed{[\,b_k\,]}\ e^{jkw_0 t}$$

信號對時間的微分

$$\frac{d}{dt}x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}[jkw_0\ a_k]\ e^{jkw_0 t}$$

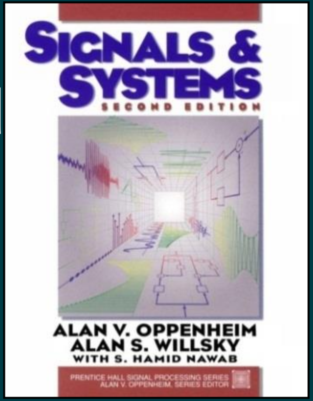
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}[b_k]\ e^{jkw_0 t}$$

$$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$$

$$\frac{d}{dt}x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k = a_k\ jkw_0$$

參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- SciLab:
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/