從信號與系統到控制

單元： CT-FS性質-1

連續時間 傅立葉級數 的 性質 – 線性

授課老師： 連　豐　力

單元學習目標與大綱

- 討論 幾個信號的 線性組合
  與他們 對應的 傅立葉級數係數 之間
  的 線性組合 的關係

傅立葉級數 與 其係數 ak

$$w_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jkw_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t)\, e^{-jkw_0 t}\, dt$$

線性的關係

- 假設有兩個信號：x(t) 與 y(t)，週期都是 T

$$\boxed{w_0 = \frac{2\pi}{T}}$$

- 也就是，

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k \qquad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jkw_0 t}$$

$$y(t) \xleftrightarrow{FS} b_k \qquad y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jkw_0 t}$$

線性的關係

- 如果有第三個信號：　$z(t) = A\ x(t) + B\ y(t)$
- 則 z(t) 的傅立葉級數係數，將會是相同的線性組合：

$$c_k = A\ a_k + B\ b_k$$

$$z(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} c_k \qquad z(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jkw_0 t}$$

線性的關係

$$z(t) = A\,\boxed{x(t)} + B\,\boxed{y(t)}$$

$$= \boxed{A} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\, e^{jkw_0 t} + \boxed{B} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k\, e^{jkw_0 t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \boxed{A\ a_k\, e^{jkw_0 t}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \boxed{B\ b_k\, e^{jkw_0 t}}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(A\ a_k \boxed{e^{jkw_0 t}} + B\ b_k \boxed{e^{jkw_0 t}} \right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(A\ a_k + B\ b_k \right) e^{jkw_0 t}$$

線性的關係

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \boxed{(A\ a_k + B\ b_k)}\ e^{jkw_0t}$$

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \boxed{c_k}\ e^{jkw_0t}$$

$$c_k = A\ a_k + B\ b_k$$

線性的關係

- 我們也可以從另一個方向來說明這個線性的關係：

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \, e^{jkw_0 t}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_T \boxed{z(t)} \, e^{-jkw_0 t} \, dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_T [\ A \ x(t) + B \ y(t)\ ] \, e^{-jkw_0 t} \, dt$$

線性的關係

$$c_k = \frac{1}{T}\int_T \left[\boxed{A\ x(t)} + \boxed{B\ y(t)}\right] e^{-jkw_0 t}\, dt$$

$$= A \boxed{\frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jkw_0 t}\, dt} + B \boxed{\frac{1}{T}\int_T y(t)\, e^{-jkw_0 t}\, dt}$$

$$= A \quad a_k \quad + B \quad b_k$$

線性的關係

$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$

$y(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k$

$z(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} c_k$

$= A\,x(t) + B\,y(t)$

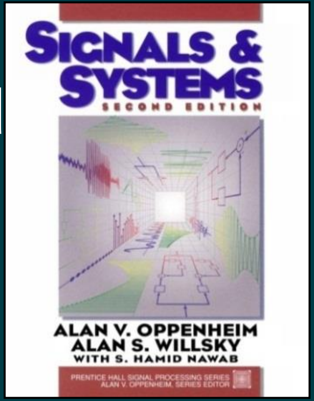
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jkw_0 t}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jkw_0 t}$$

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jkw_0 t}$$

$= A\ a_k + B\ b_k$

參考文獻



- **Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid**
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997

- **SciLab:**
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/