從信號與系統到控制

單元：連續F級數-1

連續時間 週期信號 的 傅立葉級數

授課老師：連　豐　力

單元學習目標與大綱

- 介紹一組 連續時間信號 的 基底函數
- 建立 週期性信號 的 表示式
- 推導出 連續時間信號 的 傅立葉級數

連續時間週期信號的基底

- 對於連續時間週期信號，選用下面這組基底函數：

$$e^{j0w_0t} \quad e^{jw_0t} \quad e^{j2w_0t} \quad e^{j3w_0t} \quad \ldots \qquad \boxed{w_0 = \frac{2\pi}{T}}$$

$$= 1$$

$$e^{-jw_0t} \quad e^{-j2w_0t} \quad e^{-j3w_0t} \quad \ldots$$

$$\phi_k(t) = e^{jkw_0t}$$

$$k = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots$$

連續時間週期信號的基底

- 然後，任意的連續時間週期信號 x(t) ，可以表示成：

$$x(t) = a_0 e^{j0w_0t} + a_1 e^{j1w_0t} + a_2 e^{j2w_0t} + \ldots + a_{-1} e^{-j1w_0t} + a_{-2} e^{-j2w_0t} + \ldots$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jkw_0t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \phi_k(t)$$

$$\phi_k(t) = e^{jkw_0t} \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$$

範例一

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\boxed{\cos(2\pi t)} + \boxed{\cos(4\pi t)} + \frac{2}{3}\boxed{\cos(6\pi t)}$$

$$= 1$$

$$+ \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\left(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}\right)$$

$$+ \frac{2}{3}\,\frac{1}{2}\left(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}\right)$$

$e^{js} = \cos(s) + j\sin(s)$
$\cos(s) = \frac{1}{2}\left(e^{js} + e^{-js}\right)$

範例一

$$x(t) = \boxed{1} + \boxed{\frac{1}{4}}\left(\boxed{e^{j2\pi t}} + \boxed{e^{-j2\pi t}}\right) + \boxed{\frac{1}{2}}\left(\boxed{e^{j4\pi t}} + \boxed{e^{-j4\pi t}}\right) + \boxed{\frac{1}{3}}\left(\boxed{e^{j6\pi t}} + \boxed{e^{-j6\pi t}}\right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, e^{jkw_0 t}$$

$$w_0 = 2\pi \qquad a_0 = 1$$

$$a_1 = \frac{1}{4} = a_{-1}$$

$$a_2 = \frac{1}{2} = a_{-2}$$

$$a_3 = \frac{1}{3} = a_{-3}$$

如何决定係數 a*k*

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jkw_0 t}$$

$$x(t)\, e^{-jnw_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jkw_0 t}\, e^{-jnw_0 t}$$

$$\int_0^T x(t)\, e^{-jnw_0 t}\, dt = \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jkw_0 t}\, e^{-jnw_0 t}\, dt$$

如何決定係數 a*k*

$$\int_0^T x(t)\, e^{-jnw_0 t}\, dt = \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \boxed{e^{j\boxed{k}w_0 t}\, e^{\boxed{-jn}w_0 t}}\, dt$$

$$= \boxed{\int_0^T} \boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}} a_k\, e^{j(k-n)w_0 t}\, dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^T a_k\, e^{j(k-n)w_0 t}\, dt$$

如何決定係數 a_k

$$e^{js} = \cos(s) + j\sin(s)$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\int_0^T \boxed{e^{j(k-n)w_0 t}}\, dt$$

$$= \int_0^T \cos\left((k-n)\boxed{w_0}t\right) + j\sin\left((k-n)\boxed{w_0}t\right) dt$$

$$= \int_0^T \cos\left(\underbrace{\boxed{(k-n)}}_{=1}\frac{2\pi}{T}t\right) + j\sin\left(\underbrace{\boxed{(k-n)}}_{=0}\frac{2\pi}{T}t\right) dt$$

$k \neq n$ $= 0$ $\quad$ $k = n$ $= T$

如何決定係數 ak

$$\int_0^T x(t)\, e^{-jnw_0 t}\, dt = \sum_{\boxed{k}=-\infty}^{+\infty} \int_0^T \boxed{a_k}\, \boxed{e^{j(k-n)w_0 t}}\, dt$$

$$k \neq n \quad = 0$$

$$\boxed{k = n} \quad = T$$

$$= a_n\, T$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, e^{-jnw_0 t}\, dt$$

如何決定係數 a*k*

$$a_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-j\boxed{n}\, w_0 t}\, dt$$

$n \rightarrow k$

$$a_k = \frac{1}{T}\boxed{\int_0^T} x(t)\, e^{-j k w_0 t}\, dt$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-j k w_0 t}\, dt$$

傅立葉級數 與 其係數 ak

$$w_0 = \frac{2\pi}{T}$$

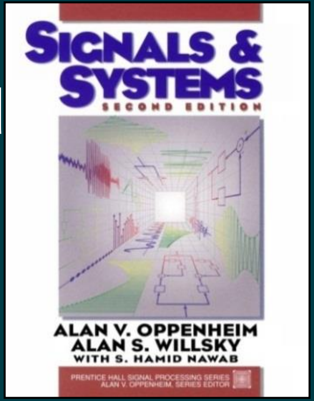
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jkw_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t)\, e^{-jkw_0 t}\, dt$$

$$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$$

參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- SciLab:
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/