

從信號與系統到控制

單元：摺積系統定理 - 3

摺積操作之下的因果性系統定理

授課老師：連 豐 力

單元學習目標與大綱

- 瞭解摺積計算操作之下
所衍生出來的系統性質與定理
- 非記憶性
- 可逆性
- 因果性
- 穩定性

系統的因果性

- 因果性的系統 (Causal) 的定義 (Definition)
- 一個所謂的具有因果性的系統，則：
- 該系統的輸出信號只跟目前與過去的輸入信號有關。
- 也就是：
- 該系統的輸出信號跟未來的輸入信號無關。

系統的因果性

- 該系統的輸出信號跟未來的輸入信號無關。



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^n x[k] h[n-k] + \sum_{k=n+1}^{+\infty} x[k] h[n-k]$$

系統的因果性

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] h[n-k] + \sum_{k=n+1}^{+\infty} x[k] h[n-k]$$


$$h[n-k] = 0 \quad \text{for } k > n$$

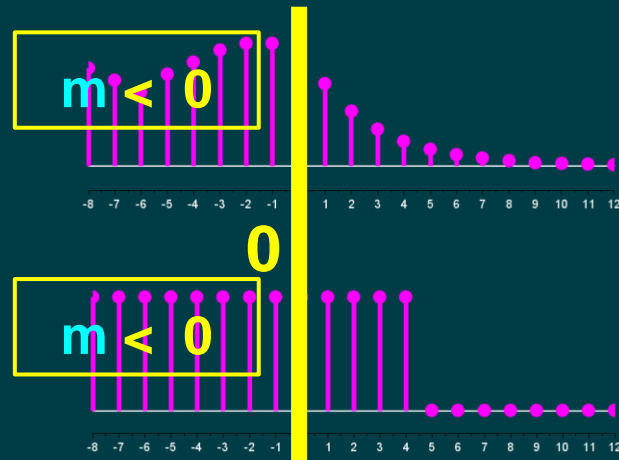
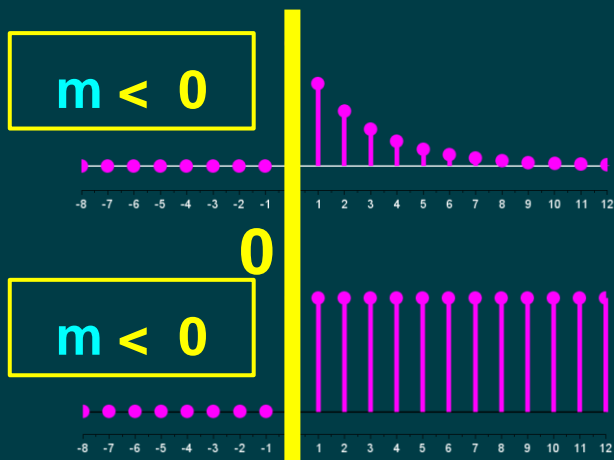
$$m = n - k \quad k = n - m$$

$$h[m] = 0 \quad \text{for } m < 0$$


系統的因果性

$$h[m] = 0 \quad \text{for } m < 0$$

- 指的是：這個系統剛開始的時候是休息的狀態



系統的因果性

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^n x[k] h[n-k] + \sum_{k=n+1}^{+\infty} x[k] h[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^n x[k] h[n-k] \quad \begin{array}{l} m = n - k \\ k = n - m \end{array} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} x[n-m] h[m] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] x[n-k] \end{aligned}$$


系統的因果性 – 連續

- 該系統的輸出信號跟未來的輸入信號無關。



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) h(t-s) ds$$

$$= \int_{-\infty}^t x(s) h(t-s) ds + \int_t^{+\infty} x(s) h(t-s) ds$$

A yellow arrow points from the 0 above the second integral to the t in the lower limit, indicating that the upper limit of the second integral is 0 .

系統的因果性 – 連續


$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(s) h(t-s) ds + \int_t^{+\infty} x(s) h(t-s) ds$$


$$h(t-s) = 0 \quad \text{for } s > t$$

$$v = t - s \quad s = t - v$$

$$h(v) = 0 \quad \text{for } v < 0$$

系統的因果性 – 連續

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^t x(s) h(t-s) ds + \int_t^{+\infty} x(s) h(t-s) ds \\ &= \int_{-\infty}^t x(s) h(t-s) ds & \begin{aligned} m &= t-s \\ s &= t-m \end{aligned} \\ &= \int_0^{\infty} x(t-m) h(m) dm & = \int_0^{\infty} h(s) x(t-s) ds \end{aligned}$$


系統的因果性

- 因果性的系統 (Causal) 的定理 (Theorem)

- 一個線性非時變的系統，

如果有下面的性質的話，則為具有因果性的系統：

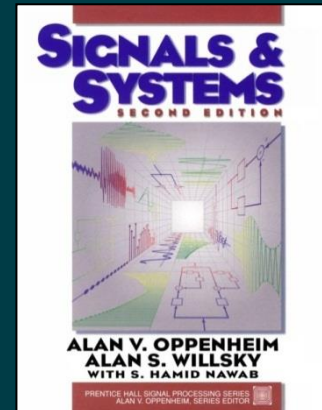
離散：
$$h[n] = 0 \quad \text{for } n < 0$$

連續：
$$h(t) = 0 \quad \text{for } t < 0$$

- 也就是說：這個系統剛開始的初始狀態是休息的狀態

參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid, **Signals & Systems**, Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- **SciLab:**
Open source software for numerical computation
<http://www.scilab.org/>