從信號與系統到控制

單元：摺積操作性質 - 3

摺積操作性質 之 分配律 - 離散

授課老師：連　豐　力

單元學習目標與大綱

- 瞭解 摺積計算操作 所具備的 分配律原理
- 針對 離散時間信號 的摺積計算操作
- 範例

離散摺積計算操作 之 分配律

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$$

- 分配律 (Distributive)

$$x[n] * \left(h1[n] + h2[n] \right)$$

$$= \quad x[n] * h1[n] + x[n] * h2[n]$$

$$\left(x1[n] + x2[n] \right) * h[n]$$

$$= \quad x1[n] * h[n] + x2[n] * h[n]$$

離散摺積計算操作 之 分配律

$$x[n]*h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$$

$$x[n] * \big(h1[n] + h2[n] \big)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \big(h1[n-k] + h2[n-k] \big)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h1[n-k] + x[k]\, h2[n-k]$$

離散摺積計算操作 之 分配律

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h1[n-k] \quad + \quad x[k]\, h2[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h1[n-k] \quad + \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h2[n-k]$$

$$= \quad x[n] * h1[n] \quad + \quad x[n] * h2[n]$$

離散摺積計算操作 之 分配律

$$x[n]*h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$$

$$\left(x1[\,n\,] + x2[\,n\,] \right) * h[\,n\,]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(x1[\,k\,] + x2[\,k\,] \right) h[\,n-k\,]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x1[\,k\,]\, h[\,n-k\,] + x2[\,k\,]\, h[\,n-k\,]$$

離散摺積計算操作 之 分配律

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x1[k]\, h[n-k] \quad + \quad x2[k]\, h[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x1[k]\, h[n-k] \quad + \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x2[k]\, h[n-k]$$

$$= \quad x1[n] * h[n] \quad + \quad x2[n] * h[n]$$

範例

$$h[n] = u[n]$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

$$= x1[n] + x2[n]$$

範例

$$\Rightarrow \; x[n] * h[n] = \big(x1[n] + x2[n]\big) * h[n]$$

$$= x1[n] * h[n] + x2[n] * h[n]$$

$$\Rightarrow \; x1[n] * h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n] * u[n] = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \; x2[n] * h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{n} u[n] * u[n] = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}$$

範例

$$\Rightarrow\ x[n] * h[n] = x1[n] * h[n] + x2[n] * h[n]$$

$$= \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-(\frac{1}{2})} + \frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-(\frac{1}{3})}$$

$$\Rightarrow\ x[n] * h[n] = \left((\frac{1}{2})^{n} + (\frac{1}{3})^{n}\right)u[n] * u[n]$$

$$= (\frac{1}{2})^{n}u[n] * u[n] + (\frac{1}{3})^{n}u[n] * u[n]$$

離散摺積計算操作 之 分配律

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$$

- 分配律 (Distributive)

$$x[n] * \left(h1[n] + h2[n] \right)$$

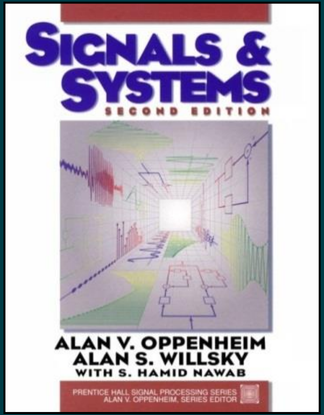
$$= \quad x[n] * h1[n] + x[n] * h2[n]$$

$$\left(x1[n] + x2[n] \right) * h[n]$$

$$= \quad x1[n] * h[n] + x2[n] * h[n]$$

參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid,
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- SciLab:
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/