從信號與系統到控制

單元：摺積操作性質 - 2

摺積操作性質 之 交換律

授課老師： 連　豐　力

單元學習目標與大綱

- 瞭解 摺積計算操作 所具備的 交換律原理

- 離散時間 的 摺積操作
- 連續時間 的 摺積操作

- 範例 – 離散摺積交換律

離散摺積計算操作 之 交換律

$$x[n]*h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k]$$

- 交換律 (Commutative)

$$x[\,n\,] * h[\,n\,] \quad = \quad h[\,n\,] * x[\,n\,]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[\,k\,]\; h[\,n-k\,] \qquad = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[\,k\,]\; x[\,n-k\,]$$

離散摺積計算操作 之 交換律

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$$

$$x[n] * h[n]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\; h[n-k] \quad = \sum_{r=+\infty}^{-\infty} x[n-r]\; h[r]$$

$$k = -\infty \;\ldots\; +\infty$$

$$r = +\infty \;\ldots\; -\infty$$

$$n - k = r$$

$$-k = r - n$$

$$k = n - r$$

離散摺積計算操作 之 交換律

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$$

$$x[\,n\,] * h[\,n\,]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[\,k\,]\; h[\,n-k\,] \qquad = \sum_{r=+\infty}^{-\infty} x[\,n-r\,]\; h[\,r\,]$$

$$r = k \qquad = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} h[\,r\,]\; x[\,n-r\,]$$

離散摺積計算操作 之 交換律

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$$

$$\boxed{x[n] * h[n]}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\; h[n-k] \quad = \sum_{r=+\infty}^{-\infty} x[n-r]\; h[r]$$

$$\boxed{h[n] * x[n]} \quad = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\; x[n-k]$$

連續摺積計算操作 之 交換律

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

- 交換律 (Commutative)

$$x(t) * h(t) \quad = \quad h(t) * x(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\ h(t-\tau)\, d\tau \qquad = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\ x(t-\tau)\, d\tau$$

連續摺積計算操作 之 交換律

$$\boxed{x(t)*h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)d\tau}$$

$$x(t) * h(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\ h(t-\tau)\, d\tau \qquad = \int_{+\infty}^{-\infty} x(t-r)\, h(r)(-dr)$$

$$\tau = -\infty \ \ldots\ +\infty$$

$$r = +\infty \ \ldots\ -\infty$$

$$t - \tau = r$$

$$-\tau = r - t$$

$$\tau = t - r \qquad d\tau = -\,dr$$

連續摺積計算操作 之 交換律

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$\boxed{x(t) * h(t)}$$

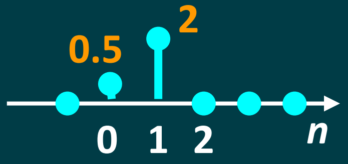
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\; h(t-\tau)\, d\tau \qquad = \int_{+\infty}^{-\infty} x(t-r)\, h(r)(-dr)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau \qquad \boxed{= h(t) * x(t)}$$

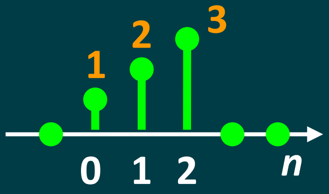
$$r = \tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(r)\, x(t-r)\, dr \qquad = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-r)\, h(r)\; (dr)$$

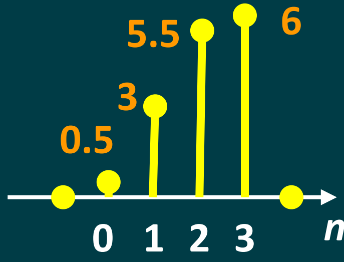
範例 – 離散摺積交換律



*

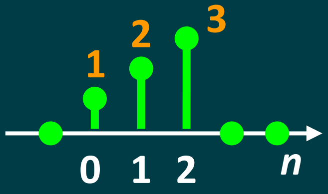


=

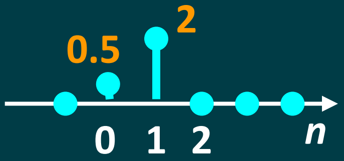


$x[n] * h[n] = y[n]$

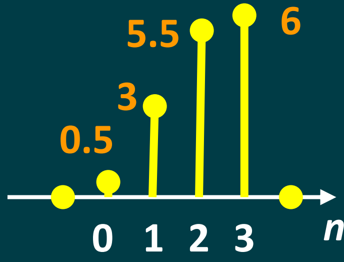
$h[n] * x[n] = y[n]$



*



=



範例 – 離散摺積交換律

範例 – 離散摺積交換律

h[n]
1
2
3
0 1 2
n
*
*
x[n]
0.5
2
0 1 2
n
=
0.5
2
0 1 2
n
1
4
0 1 2
n
1.5
6
0 1 2
n
y[n]
0.5
3
5.5
6
0 1 2 3
n

摺積計算操作 之 交換律

- 離散摺積計算

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$$

$$= h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, x[n-k]$$

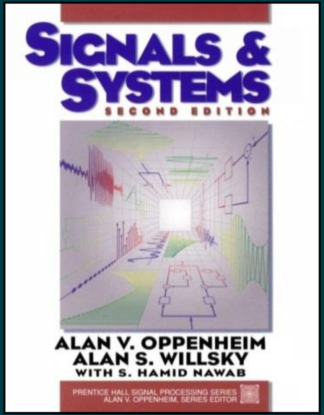
- 連續摺積計算

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

參考文獻

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid,
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997



- SciLab:
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/