從信號與系統到控制

單元：信號系統-2
信號基底 與 系統輸入輸出 的關係

授課老師：連　豐　力

單元學習目標與大綱

- 討論如何找到適合表示 信號的基底
- 這些基底對於系統輸入與輸出信號的特性
- 連續時間 信號的基底
- 離散時間 信號的基底
- 連續信號基底 的 線性組合
- 離散信號基底 的 線性組合

信號的基底 (Signal Basis)

- 基本想法 - 1：
  - 希望能夠有一組基底，利用他們的線性組合來表示信號

$$\{ \cos(t), \sin(t), \cos(at), \sin(at), \cos(bt), \sin(bt), \ldots \}$$

$$x(t) = 2\cos(t) + 3\sin(t) - 5\cos(at) + 6\sin(bt) \ldots$$

$$\{ e^{t}, e^{at}, e^{bt}, e^{ct}, \ldots \}$$

$$x(t) = 2e^{t} + 3e^{at} - 5e^{bt} + 6e^{ct} \ldots$$

信號的基底 (Signal Basis)

- 基本想法 - 2：
  – 這組基底，能夠可以用來表示所有的信號
  – 同時，對於一個系統的輸入信號與輸出信號，
  – 都可以用同一組基底的線性組合來表示之

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{System}} \longrightarrow y(t)$$

$$x(t) = 2e^{t} + 3e^{at} - 4e^{bt} \ \ldots$$

$$y(t) = 5e^{t} - 7e^{at} + e^{at} \ \ldots$$

連續時間信號的基底

- 試一下： $x(t) = e^{s\boxed{t}}$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\boxed{(t-\tau)}\, h(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \boxed{e^{s(t-\tau)}}\, h(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{st}\, e^{-s\tau}\, h(\tau)\, d\tau$$

$$x(t) \longrightarrow \underset{}{\overset{h(t)}{\boxed{\text{CT}}}} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau$$

連續時間信號的基底

- 試一下：　$x(t) = \boxed{e^{st}}$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \boxed{e^{st}}\, e^{-s\tau}\, h(\tau)\, d\tau$$

$$= e^{st} \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\boxed{-s}\tau}\, h(\tau)\, d\tau}$$

$$= \boxed{e^{st}}\ H(s)$$

$$= x(t)\ H(s)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{CT}} \longrightarrow y(t), \quad h(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau$$

離散時間信號的基底

- 試一下： $x[n] = z^{\boxed{n}}$

$$x[n] \longrightarrow \underset{\text{DT}}{\boxed{h[n]}} \longrightarrow y[n]$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]\, h[k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \boxed{x[n-k]}\ h[k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \boxed{z^{n-k}}\ h[k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \boxed{z^{n}}\ z^{-k}\ h[k]$$

$$= z^{n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^{-k}\ h[k]$$

離散時間信號的基底

- 試一下： $x[n] = \boxed{z^n}$

$$y[n] = z^n \boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \boxed{z}^{-k}\, h[k]}$$

$$= \boxed{z^n} \quad H(z)$$

$$= x[n] \quad H(z)$$

$$x[n] \rightarrow \boxed{\text{DT}} \rightarrow y[n]$$

h[n]

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]\, h[k]$$

信號基底 與 系統輸入輸出

$x(t) = e^{st}$ → $h(t)$ CT → $y(t) = \boxed{e^{st}}\, H(s)$

$= x(t)\; H(s)$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\tau} \boxed{h(\tau)} d\tau$$

$x[n] = z^{n}$ → $h[n]$ DT → $y[n] = \boxed{z^{n}}\, H(z)$

$= x[n]\; H(z)$

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^{-k} \boxed{h[k]}$$

連續信號基底的線性組合

$$x(t) = e^{s t} \xrightarrow{\boxed{\text{CT}},\ h(t)} y(t) = e^{s t} H(s)$$

$$x(t) = \boxed{\begin{aligned} & e^{s1\,t} \\ + & e^{s2\,t} \\ + & e^{s3\,t} \end{aligned}}$$

$$y(t) = \boxed{\begin{aligned} & e^{s1\,t} \\ + & e^{s2\,t} \\ + & e^{s3\,t} \end{aligned}} \ \boxed{\begin{aligned} & H(s1) \\ & H(s2) \\ & H(s3) \end{aligned}}$$

$$x(t) = \sum_i \boxed{a_i} \boxed{e^{s_i\,t}}$$

$$y(t) = \sum_i \boxed{a_i} \boxed{e^{s_i\,t} H(s_i)}$$

離散信號基底的線性組合

$$x[n] = z^n \xrightarrow{\quad} \boxed{\text{DT}}_{\,h[n]} \xrightarrow{\quad} y[n] = z^n H(z)$$

$$x[n] = \boxed{z_1^n + z_2^n + z_3^n}$$

$$y[n] = \boxed{z_1^n + z_2^n + z_3^n} \; \boxed{H(z_1) \; H(z_2) \; H(z_3)}$$

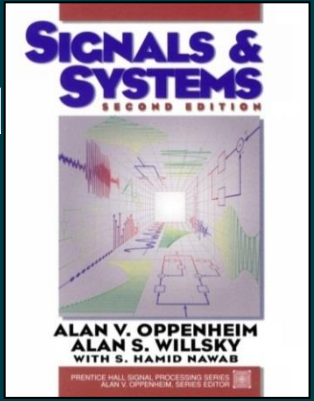
$$x[n] = \sum_i \boxed{a_i} \boxed{z_i^n}$$

$$y[n] = \sum_i \boxed{a_i} \boxed{z_i^n H(z_i)}$$

信號基底的想法與特性

- 基本想法：
  - 希望能夠有一組基底，利用他們的線性組合來表示信號
- 主要特點：
  - 這組基底，能夠可以用來表示所有的信號
  - 同時，對於一個系統的輸入信號與輸出信號，都可以用 同一組基底 的 線性組合 來表示之

參考文獻



- **Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid**
  Signals & Systems,
  Prentice Hall, 2nd Edition, 1997

- **SciLab:**
  Open source software for numerical computation
  http://www.scilab.org/