《人文及社會科學集刊》
第十卷第三期 (87/9), pp. 361-397

股票價格之模型誤設與投機泡沫：一般化 Kalman filter 的分析

林建甫*
台大經濟研究所副教授

陳禮潭**
中央研究院經濟所副研究員

李明煌*
台大經濟研究所碩士

本文研究投機泡沫是否存在於股票價格。其模型誤設及投機泡沫若存在，都是不可觀察的變數且 state-space 模型中傳遞方程與觀測方程中的干擾項爲同期相關。於是我們採用 Jazwinski（1970）的一般化 Kalman filter 來估計。使用 Malkiel（1979）和 Pindyck（1984）的變動風險貼水股價模型來設定誤設變數。在得到變數估計值後，我們沿續 Durlauf and Hooker（1994）及 Chen（1995）來做正交檢定分析。結果是 CRSP 的資料，變動風險貼水模型具有良好的解釋，且無泡沫存在於股價中。但 MSCI 資料中，法國、德國、義大利之股價，無誤設的流量設定式未與訊息集合變數正交。故變動風險貼水的模型未提供好的解釋，泡沫的存在性也未得到明確的結論。

關鍵詞：模型誤設、投機泡沫、正交檢定、變動風險貼水、一般化 Kalman filter

第一節　前言

價格的解釋一直是經濟學很重要的工作。然而，對於股票價格的解釋，

我們感謝參與兩位匿名審稿人的建議及台大經濟系計量及總體組研討會的師生，尤其是林向愷、管中閔、陳師孟及鍾經樊教授寶貴的意見，我們也感謝輔大經濟系的姚睿教授，在先前版本提供的指教。
收稿日期：86 年 10 月 15 日；接受刊登日期：87 年 3 月 3 日

卻始終爭論不已。Lucas (1978) 提出理性預期的消費者，願付的現今股票價格是預期未來股利及股價的折現值，因爲若此消費者是風險中立者，則其所要求的報酬率 (折現因子) 爲固定，在無套利假設下可推得此股價訂價原則；也就是所謂之股票的基要 (fundamental) 價格。但在印證實際資料時，股價卻無法符合以上理論上的解釋 (如：Shiller (1981)，LeRoy and Porter (1981)，Blanchard and Watson (1982))。尤其是股票價格常呈現大幅波動，有人即將此情形歸因於投機泡沫或明牌效應。

歷史上有關的著名事件，例如發生在十七世紀荷蘭的鬱金香泡沫 (the Tulip Bubble)，鬱金香球莖在 1637 年 1 月一個月份就暴漲 20 倍，接著在 2 月卻大幅下跌；1711 年創立於英國的南海公司，面值 100 英磅的股票從 1920 年 5 月 550 英磅直衝上 1 千英磅，到八月時有名的南海泡沫 (the South Sea Bubble) (見 Kindleberger (1978)) 便破滅，股價一瀉如注；同樣情形也發生在同時期的法國密西西比公司 (即 the Mississippi Bubble)；1929 年美國華爾街紐約證券交易所在一片漲聲之後突然崩盤，大部分績優股跌幅超過百分之九十；同樣的戲碼發生在 1987 年的十月崩盤 (October Crash)。這些事件確實讓人聯想到投機泡沫在作祟。因此投機泡沫是否存在於資產價格中，對於資源有限的經濟環境，其資源配置的效率將遭受嚴重的影響。因此對於經濟政策的擬訂也就更形重要。

將投機泡沫 (speculative bubbles)，或理性泡沫 (rational bubbles) (見 Blanchard and Watson (1982)) 考慮進來後，投機泡沫可以反應出投資者對於股價預言的自我實現 (a self-fulfilling belief)。O'Connell and Zeldes (1988) 稱此泡沫的產生是 "Rational Ponzi games"。[1] 然而，這種泡沫會呈現發散的 (explosive) 情況，使股價趨近於正無窮大或負無窮大。Blanchard and Watson (1982) 提出讓泡沫破裂再重生的模型，稱作破裂性泡沫 (collapsing bubbles)。但是對於無限期生命規劃的投資者來說，

1 類似俗稱的「老鼠會」。美國人 Charles Ponzi 發現提供高報酬來吸收資金，並吸收更多資金以債養債來償還先前吸收資金的利息，只要資金的成長高過利息支出便可以辦到。但若資金成長低於利息支出，Ponzi 的陰謀就被揭穿 (見 Minsky (1982))。

O'Connell and Zeldes（1988）的泡沫及 Blanchard and Watson（1982）的破裂性泡沫違反了 transversality condition。Diba and Grossman（1986）則提供一個因市場參與者誤判市場行情而產生自我迴歸型的泡沫模型，使得泡沫符合 transversality condition。所以 transversality condition 的滿足，仍不足以排除泡沫的存在。Diba and Grossman（1988）則是在股票可以免費拋棄的假設下，股價不可爲負數，因此推論得若股價含有泡沫，一定是在股票上市的第一天起就存在；而且只要投機泡沫破滅，便不會再產生泡沫。這些文獻，是以無限期生命規劃的模型來分析。相對的，Tirole (1985) 以 OLG (overlapping generations) 模型來分析，設定人口數以一定成長率增加，且生產函數爲固定規模報酬。他發現：若人口成長率大過資產報酬率（利率）時將產生動態無效率（dynamic inefficiency），所以資產的訂價須含有泡沫，才能產生動態效率（dynamic efficiency）。因此在動態無效率情況下也可以產生投機泡沫。O'Connell and Zeldes（1988）則更擴大了視野，發現在以下兩種經濟情況下可能產生投機泡沫：一種爲在無限期生命規劃下人口增加且人口成長率大過資產報酬率（利率），而經濟主體是各自做決策時；另一種是 OLG 模型中無跨世代的利他行爲，也可能產生投機泡沫。所以可知投機泡沫究竟存在與否，在理論建構上仍莫衷一是，尙無明確定論。因此投機泡沫存在的問題，在實證研究的辯證上，便顯得非常重要。

Shiller（1984）以社會心理學的角度，將投資人分爲聰明投資人（smart-money investor）和一般投資人（ordinary investor）。一般投資人買賣股票的行爲是原來無套利模型無法解釋的，可能受謠言、動物本能（animal spirits）、社會潮流（fad）的影響。聰明投資人除了預測未來股利，還須預測一般投資者的行爲，才能進行套利工作。因此，一般投資者的行爲，會使得效率市場假說的股價等於基要價格的理論無法成立。但是他的模型並未對一般投資者行爲做刻劃，我們無法從這模型學習到一般投資者到底如何做其選擇行爲。Culter, Poterba and Summers（1990）則清楚地刻劃不同投資者的投資決策，將投資人分爲三類：(1)理性預期未來報酬率；(2)堅守股價等於基要價格；(3)回顧過去實現的報酬率來買賣股票。因此每一類人的行爲均會對其他人產生回饋（feedback）的效果，造成股價變動且報酬率產生自

我相關。然而，這將使第三類投資者的行爲可被預測，進而從中賺取利潤，因此無套利模型是否成立還有待商榷。Topol (1991) 則設定在訊息不完全的環境，買賣雙方在自己可用的訊息下出價或喊價。而出價或喊價的動作，又回饋成爲對方的訊息。因此刻劃了爲什麼會有潮流產生。Topol 以此模型解釋了股價經常波動及時常偏離基要價格的原因，就是在不完全訊息下，相互搜集資訊的結果。Malkiel (1979) 主張 1970 年代中期美國股票價格的大跌是肇因於資本投資環境的風險性增高。Pindyck (1984) 提供更進一步的解釋這一種現象，強調由股市波動所引申出來的風險貼水，將反映到股價上。針對 Malkiel-Pindyck 上述的假說，Poterba 和 Summers (1986) 對風險貼水提出一個衡量方法，並驗證 Malkiel-Pindyck 的假說是否成立；他們認爲股價的波動程度若具有持續性，對於股票投資形成的風險增加，所以風險貼水將包含在股票投資的報酬率之中，因此風險貼水的衡量可從改變股價評價方式著手。然而他們的實證結果並不支持 Malkiel-Pindyck 的假說。基本上，Poterba 和 Summers (1986) 的分析方法並沒有被廣泛的採用。主要的原因是，爲了計算出當月不可觀察的風險貼水的估計值，他們以當月各營業日的股票報酬率變異數爲衡量標準。一般若用月資料做實證研究，將無法直接計算每月股票報酬率的變異數；即使採用日資料也需要獲得每日的風險貼水估計值，才可運用他們的的方法。

另一個考慮投機泡沫需要關心的問題是可能模型有誤設的情形。Hansen and Singleton (1982) 將 Lucas (1978) 股價模型的 Euler equation 以一般動差法 (generalized method of moment, GMM) 作股價報酬率的實證研究，以避免模型誤差設定的麻煩。他們另外一個特色是採用的貼現率不是固定的，而是由跨期效用函數及消費水準所組成，這通常是隨時間變動。West (1988) 用類似 Hansen and Singleton (1982) 的方式，採用股價及股利的原值 (level) 資料，以變動貼現率模型研究股價超額變動 (即大過股利以固定利率折現的預期值的波動) 的原因。結論是變動利率並非是造成股價超額變動的原因。但他們的實證分析，只能檢定模型有無誤設，並無法檢定投機泡沫的存在。West (1987) 假設沒有投機泡沫下，並設定股利的隨機行程 (process)，運用 Hansen-Sargent (1980) 的公式計算出理論的股票基要價

格爲過去股利及一組參數的函數。接著，利用實際股價資料得出與過去股利關係的參數。West 推論：若兩組參數無差異，則沒有泡沫存在。然而，當虛無假設被拒絕時，將產生很多不同的對立假設，並不能直接歸因於投機泡沫的因素。Diba and Grossman (1988a) 考慮了不可觀察的變數 (即本文所稱之誤設) 在股價中，他們分析了股價及股利的恆定性 (stationary) 及共積 (co-integration) 檢定。因爲投機泡沫具有非恆定的性質，所以藉由檢定股價、股利的線性組合 (共積) 是否爲恆定，可推論是否有泡沫現象。[2] 然而，Evans (1991) 以模擬的方法提出單根檢定 (unit root test) 及共積檢定是無法檢定出破裂性泡沫，而且即使破裂性泡沫存在，股價並不會比股利更具發散性 (explosive)。

關於同時考慮模型誤設及投機泡沫的做法較嚴謹的討論爲 Durlauf and Hooker (1994) 及 Chen (1995)。他們分別研究德國通貨膨脹資料及股票價格，使用固定利率的無套利模型，依投機泡沫的隨機行程 (process) 將投機泡沫去除，所得到的變數稱爲流量設定式 (the flow specification)；將股價偏離基要價格的差額稱爲存量設定式 (the stock specification)。前者用來檢定模型是否誤設，後者則用來檢定股價是否遵循基要價格。Durlauf and Hooker (1994) 的檢定結果爲存有誤設的情形，所以他們粗略的推論，德國通貨膨脹時的物價不具有投機泡沫的現象。Chen (1995) 的結論爲有模型誤設但無發散性的投機泡沫。

本文將繼續採用 Durlauf and Hooker (1994) 及 Chen (1995) 所提出採用一系列的檢定技術來做分析。但我們考慮模型誤設及投機泡沫若存在，都是不可直接觀察的變數。傳統的估計方法不能給我們滿意的結果。這時應採用 state-space 模型，同時可慮不可觀察的狀態變數於傳遞方程與可觀察變數於觀測方程中，然後以 Kalman filter 來一起估計，再做檢定。[3] 但傳統

2 Pittis (1993) 也採用共積檢定研究匯率資料，並容許誤設存在，結論是某些國家的匯率具有投機泡沫的現象。

3 以 Kalman filter 估計方法分析相關問題的文獻亦汗牛充棟。例如：林向愷 (1991) 以 Shiller (1984) 異質投資人的觀念結合 Kalman filter 估計技巧分析台灣股價得到不錯的結果。Wu (1995) 則使用美元、英磅、日元、德國馬克之匯率資料，以 Kalman filter 技術分

的 Kalman filter 只考慮 state-space 模型中傳遞方程與觀測方程中之個別的干擾項爲簡單的不相關。因爲一般金融市場的干擾項則應息息相關，同時影響當期的觀察變數與狀態變數。因此我們必須採用 Jazwinski (1970) 所推導的一般化 Kalman filter 結果來估計。本文以下章節順序：第二節爲爲理論模型的推演；第三節討論基要價格與模型誤設的設定。第四節爲 state-space 模型的設定與估計；第五節爲實證結果。第六節爲簡單的結論。

第二節　理論模型

本節將由股票價格的理論設定指出投機泡沫與模型誤設的發生狀況，然後討論如何做正交檢定。由 Lucas (1978) 的模型，消費者是風險中立者，則其所要求的報酬率（折現因子）爲固定，在無套利條件及利率固定假設下，所推得的股價訂價原則是本期股價爲下期股價及股利預期的折現值，即：

$$P_t^g = \beta E[d_{t+1} + P_{t+1}^g | I_t] \tag{2-1}$$

其中 P_t^g 是 t 期的股票理論價格；β 是折現率（即 $\beta=(1+r)^{-1}\in(0,1)$，r 爲固定利率）；d_{t+1} 是 $t+1$ 期的股利；I_t 爲第 t 期的資訊集合；$E[\cdot|I_t]$ 是在 I_t 已知下的條件期望值，以下將以 $E_t[\cdot]$ 表示。(2-1) 式連續往前代換可得：

$$P_t^g = \sum_{i=1}^{T} \beta^i E_t[d_{t+i}] + \beta^T E_t[P_{t+T}^g] \tag{2-2}$$

若加入 Transversality condition：

解出不可觀察的投機泡沫，並檢定虛無假設：無投機泡沫。結論爲無投機泡沫存在。Burmeister and Wall (1982, 1987) 則使用 Kalman filter 分析德國通貨膨脹資料 (hyper-inflation data) 是否有泡沫存在，結論皆爲接受泡沫存在。Burmeister and Wall (1987) 特別強調正確地設定模型，以避免不正確的設定導致不正確的結論，因此他們也修改了 (1982) 的模型，採用較合理的設定。然而上述的文獻所設定的 state-space 模型，都假設了狀態變數方程與可觀察變數方程是不相關。

$$\lim_{T\to\infty}\beta^T E_t[P^g_{t+T+1}]=0$$

則可得到基要股票價格 (P^f_t)：

$$P^f_t=\sum_{i=1}^{\infty}\beta^i E_t[d_{t+i}] \tag{2-3}$$

基要股票價格的解釋爲預期未來股利的折現值。(2-3) 式的 P^f_t 可爲 (2-1) 式的解。但更一般化的理論解，應包括投機泡沫。若考慮投機泡沫 (B_t) 在股價中，則理論股價爲 $P^g_t=P^f_t+B_t$。[4] 設定投機泡沫的跨期關係爲：

$$E_t(B_{t+1})=\beta^{-1}B_t \tag{2-4}$$

則可以發現如此設定會符合 (2-1) 及 (2-2) 型式。[5] 我們可以將投機泡沫看成 (2-2) 式中右邊第二項，即 $B_t=\beta^T E_t[P_{t+T}]$，一般稱此爲發散性的泡沫 (explosive bubbles)。因爲若 $B_t>0$，則當 $T\to\infty$ 將使 $E_t(B_{t+T})\to\infty$。同理，若 $B_t<0$，則當 $T\to\infty$ 將使 $E_t(B_{t+T})\to-\infty$。但如此將違反 transversality condition。所以 Diba and Grossman (1986) 提出破裂性泡沫的建議：[6]

$$B_{t+1}=\psi_{t+1}B_t+\gamma_{t+1} \tag{2-4$'$}$$

其中 $E_t(\psi_{t+1})=\beta^{-1}$，$E_t(\gamma_{t+1})=0$。當 $\psi_{t+1}=0$ 時，投機泡沫破裂，設其發生機率爲 π。當 $\psi_{t+1}\neq 0$ 時，投機泡沫持續著。則可以計算出泡沫持續期間的期望值爲 π^{-1}。而投機泡沫在 T 期以前不破裂的機率爲 $(1-\pi)^{T-t}$，故當

4 泡沫我們使用相加 (additive) 的項目，乃是因爲如此的模型設定易於操作。如果設成相乘或指數或更複雜的形式，則模型將爲高度非線性，不僅難以操作，而且無助於分析股價偏離基要價格的成因。一般文獻在探討股票價格及投機泡沫時，均使用相加的型式。Evans (1991) 因特殊目的採相乘的方式，視爲特例。

5 Burmeister and Wall (1982) 的泡沫爲估計一個未知的常數項，是另一種假定。

6 Blanchard (1979)，Blanchard and Watson (1982) 和 West (1987) 使用另一種設定：

$$B_{t+1}=\begin{cases}\pi_{t+1}^{-1}\beta^{-1}(B_t-\bar{B})+\gamma_{t+1} & \text{，機率爲 } \pi_{t+1}\\ (1-\pi_{t+1})^{-1}\beta^{-1}\bar{B}+\gamma_{t+1} & \text{，機率爲 } (1-\pi_{t+1})\end{cases}。$$

$T \to \infty$ 時，不破裂的機率將趨近於 0。[7] 如此將可符合 transversality condition。

至於模型誤設的產生原因，Shiller (1984) 的異質投資人、Malkiel (1979) 和 Pindyck（1984）的變動貼現率及 Diba and Grossman（1988）的市場參與者誤判模型都可以窺見。因此當考慮模型誤設的可能時，理論股價加上誤設的部份即爲實際股價，亦即：

$$P_t = P_t^g + N_t = P_t^f + B_t + N_t \tag{2-5}$$

其中 N_t 爲模型誤設是無套利模型無法解釋的部分。將（2-5）式重新改寫爲

$$P_t = E_t\left[\sum_{i=1}^{\infty}\beta^i d_{t+i}\right] + B_t + N_t$$

以及

$$P_{t+1} = E_{t+1}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\beta^i d_{t+1+i}\right] + B_{t+1} + N_{t+1}$$

將以上二式代入下式中

$$P_{t+1} + d_{t+1} - \beta^{-1}P_t = \left[d_{t+1} - E_t d_{t+1} + \sum_{i=1}^{\infty}\beta^i(E_{t+1}d_{t+1+i} - E_t d_{t+1+i})\right] + B_{t+1} - \beta^{-1}B_t + N_{t+1} - \beta^{-1}N_t \tag{2-6}$$

建構預期的誤差爲 $w_{t+1} = \left[d_{t+1} - E_t d_{t+1} + \sum_{i=1}^{\infty}\beta^i(E_{t+1}d_{t+1+i} - E_t d_{t+1+i})\right]$，根

7 Diba and Grossman（1988）以股票可免費拋棄的假設，去除負泡沫存在的可能性，進而推論當泡沫破滅，即 $\psi_{t+1}=0$，且 $B_{t+1}=\gamma_{t+1}$，因爲負泡沫不可能存在，所以 $\gamma_{t+1} \geq 0$，且 $E_t(\gamma_{t+1})=0$，故 $\gamma_{t+1}=0$。因此推論得若股價含有泡沫，一定是在股票上市的第一天起就存在。只要投機泡沫破滅，便不會再產生泡沫。

據 the law of iteration，可知 $E_t(w_{t+1})=0$。並定義 $R_{t+1}\equiv P_{t+1}+d_{t+1}-\beta^{-1}P_t$，即爲股票的超額利潤， Durlauf and Hall (1994) 稱此爲流量設定式。所以

$$R_{t+1}=N_{t+1}-\beta^{-1}N_t+w_{t+1}+b_{t+1} \tag{2-7}$$

其中 $b_{t+1}=\psi_{t+1}B_t-\beta^{-1}B_t+\gamma_{t+1}$。其由來是由 (2-4)′ 式 $B_{t+1}=\psi_{t+1}B_t+\gamma_{t+1}$ 代入而來，所以 b_{t+1} 是投機泡沫行程的函數，因此 $E_t[b_{t+1}]=0$。若無投機泡沫存在，則 $b_{t+1}=0$。令 $L_t(x)$ 是 t 期訊息集合 (I_t) 中可觀察的變數之部分訊息集合。根據理性預期假設假設，可知 w_{t+1}，b_{t+1} 與 $L_t(x)$ 正交。因此，若 R_{t+1} 不與 $L_t(x)$ 正交，則有可能是模型誤設存在，即 N_t 不等於零或N_{t+1} 不與 $L_t(x)$ 正交。

爲了瞭解股價是否遵循 (2-3) 式的基要價格，所以 Durlauf and Hall (1994) 將實際的股票價格與基要價格的差額定義爲存量設定式$S_t\equiv P_t-P_t^f$，而由 (2-5) 式可知

$$S_t=B_t+N_t \tag{2-8}$$

若 N_t 爲零且無投機泡沫，則 S_t 應與 $L_t(x)$ 爲正交。

所以在考慮股價解釋的一般情況（含有投機泡沫及模型誤設）下，爲了分析股價是否符合基要價格，必須將其可能影響因素逐一討論。藉由分析 R_{t+1}、S_t 是否與 $L_t(x)$ 正交，可得到以下結果：

(1)若 R_{t+1}、S_t 皆與 $L_t(x)$ 正交，則股票價格爲即基要價格，無模型誤設與投機泡沫。

(2)若 R_{t+1} 與 $L_t(x)$ 正交，而 S_t 不與 $L_t(x)$ 正交，則無模型誤設，而股票價格含有泡沫。

(3)若 S_t 與 $L_t(x)$ 正交，而 R_{t+1} 不與 $L_t(x)$ 正交，則模型誤設和投機泡沫均可能存在。這種結果可能是正值的投機泡沫與負值的誤設變數相互抵銷，導致 S_t 與 $L_t(x)$ 正交。

(4)若 S_t、R_{t+1} 皆不與 $L_t(x)$ 正交，則存有模型誤設，但股票價格是否含有泡沫，則須進一步分析。

關於正交條件的檢定，Hansen（1982）提出用一般化動差法來估計及檢定正交條件是否成立。其統計量 J 爲一般廣泛所應用，而其分配爲卡方分配。Durlauf and Hooker（1994）也是用一般化動差法來估計，但提出 R_{t+1} 投影至 $L_t(x)$，也可檢驗其是否正交。檢定方法一般用 Wald 統計量或 LM 統計量檢定虛無假設，其分配也爲卡方分配。但應用 Durlauf and Hooker（1994）的檢定觀念，我們用各種不同估計方法以估計，然後得到 R_{t+1} 數列，也可做投影正交檢定。

第三節　基要價格與模型誤設

前面論及 R_{t+1} 和 S_t 是否與 $L_t(x)$ 正交，是我們推論的重要依據。但往往資料的表現就是 R_{t+1} 就不與 $L_t(x)$ 正交。這使得我們很難下結論。由存量設定式中，我們看到基要價格是重要的關鍵。而模型的誤設，因爲一般文獻或是以無完整（closed form）解，或是需要個別投資人的資料，而難以計算。然而 Malkiel (1979) 和 Pindyck (1984) 以風險貼水加入股利的折現因子中，得到的變動風險貼水的股價模型，作爲發生誤設的原因，相對容易，可以做我們思考的起點。而且 Shiller（1984）的異質投資人及 Diba and Grossman（1988）的市場參與者誤判模型都也可以經市場波動的持續性而去影響 Malkiel（1979）和 Pindyck（1984）關心的變動貼現率。經過本節的推導，基要價格與模型誤設雖成爲不可觀察的變數，但也有相當程度的關連，結合可觀察的股價，將可以下一節的 state space 模型來估計，使我們正交檢定容易下結論。

基要價格，P_t^f 的數列很明顯的是不可觀察到的變數，文獻上對此的處理方式有兩種。第一種，以股利的實現值代表預期值。但碰到的困難是，未來至無限期的股利目前是不可能得到的。因此，必須將股利的時間數列資料作截斷（truncation），以截斷點的實際股價，替代該時點未來的股利折現值，如 Shiller（1981）、LeRoy and Porter（1981）、Durlauf and Hooker（1994），即

$$P_t^{f*}=\sum_{i=0}^{T-t}\beta^i d_{t+i}+\beta^{T-t}P_T=P_t^f+\zeta_{t+1}$$

P_t^{f*} 爲完全預期（perfect foresight）的價格，P_T 爲截斷點的股價，在理性預期下 $E_t(\zeta_{t+1})=0$。但若我們目的是要追查投機泡沫是否存在，這樣的作法將無法達成目的。Flood and Hodrick（1986）及 Mankiw, Romer and Shapiro（1985）表示，若截斷點的股價含有泡沫，則正交檢定推論是無法顯示泡沫的存在。

有鑑於此，我們採用另一種方法獲得 P_t^f 變數。首先，必須先假設 d_t 的隨機行程，然後運用 Hansen-Sargent（1980）的推導，求出 P_t^f 變數。本文將假設 d_t 的一階差分爲 $AR(q)$，至於其落後期長度 (q) 則採用 H-Q、AIC、SBC 等的訊息準則，由資料來決定。以下是 P_t^f 的求解過程：

假設 Δd_t 的隨機行程爲：

$$\Delta d_t=\bar{\phi}+\phi_1\Delta d_{t-1}+\phi_2\Delta d_{t-2}+\ \ldots\ +\phi_q\Delta d_{t-q}+e_t \tag{3-1}$$

其中 $E_{t-1}(e_t)=0$。P_t^f 可重新以下式表示：

$$\begin{aligned}P_t^f&=E_t\left[\sum_{i=1}^{\infty}\beta^i d_{t+i}\right]\\&=\frac{\beta}{1-\beta}\left\{d_t+E_t\left[\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i\Delta d_{t+1+i}\right]\right\}\end{aligned} \tag{3-2}$$

爲求解方便，將（3-1）式以矩陣表示：

$$\Delta D_t=\Gamma\Delta D_{t-1}+\boldsymbol{e}_t$$

$$\Delta D_t=\begin{bmatrix}1\\ \Delta d_t\\ \Delta d_{t-1}\\ \vdots\\ \Delta d_{t-q+1}\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{e}_t=\begin{bmatrix}0\\ e_t\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \bar{\phi} & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \cdots & \phi_q \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $E_t(\Delta \boldsymbol{D}_{t+i})=\boldsymbol{\Gamma}^i\Delta\boldsymbol{D}_t$。以上式來表示則 P_t^f 可以簡單的化簡為：[8]

$$P_t^f=\bar{h}+h_0d_t+h_1\Delta d_t+h_2\Delta d_{t-1}+\ldots+h_q\Delta d_{t-q+1} \tag{3-3}$$

其中 $\boldsymbol{g}=[0\ 1\ 0\ 0\ \ldots\ 0]$，$h_0=\dfrac{\beta}{(1-\beta)}$，且 $\bar{h}$ 及 $h_j(j=1,2,\ldots,q)$ 皆為 β、$\bar{\phi}$、$\phi_j(j=1,2,\ldots,q)$ 的函數。因此有了 β、$\bar{\phi}$、ϕ_j，就可以計算 P_t^f 變數，進一步可以得到 $S_t=P_t-P_t^f$。在無模型誤設的情況下，S_t 與 $L_t(x)$ 正交，則可以推論無投機泡沫存在。

然而，模型若有誤設，則 S_t 與 $L_t(x)$ 正交與否的影響因素，可能是由於誤設部分或泡沫部分或兩者所產生，而無法強硬地歸因於投機泡沫。我們以變動的風險貼水作為 N_t 的理論基礎的模型誤設其模型為

$$P_t=E_t\left[\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_{t+i}d_{t+i}\right] \tag{3-4}$$

其中 $\varphi_{t+i}=\prod_{j=1}^{i}(1+r_{t+j}+\alpha_{t+j})^{-1}$，$r_{t+j}$ 為無風險利率，α_{t+j} 為風險貼水。假設無風險利率為固定，風險貼水長期平均為 $\bar{\alpha}$。將（3-4）式在 $\bar{\alpha}$ 處對 α_{t+i} 作

---

8 $$P_t^f=\frac{\beta}{1-\beta}\left\{d_1+E_t\left[\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i\boldsymbol{g}\Delta\boldsymbol{D}_{t+1+i}\right]\right\}$$
$$=\frac{\beta}{1-\beta}\left\{d_1+\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i\boldsymbol{g}\boldsymbol{\Gamma}^{i+1}\Delta\boldsymbol{D}_t\right\}$$
$$=\frac{\beta}{1-\beta}\{d_t+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{I}-\beta\boldsymbol{\Gamma})^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\Delta\boldsymbol{D}_t\}$$
$$=\bar{h}+h_0d_t+h_1\Delta d_t+h_2\Delta d_{t-1}+\ldots+h_q\Delta d_{t-q+1}$$

泰勒展開：

$$P_t \cong \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_t d_{t+1}}{(1+r+\bar{\alpha})^i} + E_t \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial P_t^*}{\partial \alpha_{t+1}} (\alpha_{t+i} - \bar{\alpha}) \tag{3-5}$$

其中

$$\frac{\partial P_t^*}{\partial \alpha_{t+1}} = -(1+r+\bar{\alpha})^{-i} \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_{t+i+k}}{(1+r+\bar{\alpha})^{k+1}}$$

在 (3-5) 式中我們僅求 P_t 的一次近似式，而忽略較高次的其他項，因此所得到的爲近似值。以後爲方便起見，將以等號直接替代 (3-5) 式的近似符號 ($\cong$)。將 (3-5) 式加入投機泡沫 (B_t) 與 (2-5) 式的股價誤設模型相比較，令 (3-5) 式右邊第二項爲誤設部分，即：

$$N_t \equiv E_t \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial P_t^*}{\partial \alpha_{t+1}} (\alpha_{t+i} - \bar{\alpha}) \tag{3-6}$$

如此我們可以設此爲 N_t 發生的原因。令此時折現率 $\beta=(1+r+\bar{\alpha})^{-1}$，[9] 並做簡單的演算可得：

$$N_{t+1} - \beta^{-1} N_t = E_t \left[\sum_{k=1}^{\infty} \beta^k d_{t+k} (\alpha_{t+1} - \bar{\alpha}) \right] + \nu_{t+1} \tag{3-7}$$

其中

$$\nu_{t+1} = \left\{ -E_{t+1} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \beta^i \left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta^{k+1} d_{t+1+i+k} (\alpha_{t+1+i} - \bar{\alpha}) \right) \right] + \right.$$

9 若和 Lucas (1978) 非線性消費函數之資本資產定價模型相對應，此時折現率剛好與該模型之固定時間偏好率呈線性關係，而應時變動之風險貼水則可對應於該模型之 $U'(C_t)/U'(C_{t+1})$ 部分。因此相對應之投機泡沫的跨期關係爲：$E_t(B_{t+1})=\varphi_t^{-1}B_t$。此時驅動投機泡沫隨機行程之折現率的倒數，與原先的係數有所不同。若將此泡沫行程線性化則 $E_t(B_{t+1})=\varphi^{-1}B_t$，其中 φ 與 β 有線性關係。

$$E_t\left[\sum_{i=2}^{\infty}\beta^{i-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\beta^{k+1}d_{t+i+k}(\alpha_{t+i}-\bar{\alpha})\right]\right]\Bigg\}$$

理性預期之下 $E_t(\nu_{t+1})=0$。更進一步，在一般情形之下我們假設 d_{t+k} 與 α_{t+1} 爲獨立，則（3-7）式可以簡化爲：

$$N_{t+1}-\beta^{-1}N_t=P_t^f\times E_t(\alpha_{t+1}+\bar{\alpha})+\nu_{t+1}\text{。} \tag{3-8}$$

尤有進者，依照 Malkiel (1979) 和 Pindyck (1984) 的設定，假設 α_t 爲 AR(1) process：

$$\alpha_{t+1}-\bar{\alpha}=\rho(\alpha_t-\bar{\alpha})+\varepsilon_{t+1} \tag{3-9}$$

再簡化（3-7）式的結果爲 $\boldsymbol{N}_{t+1}-\beta^{-1}\boldsymbol{N}_t=\rho\boldsymbol{P}_t^f(\alpha_t-\bar{\alpha})+\nu_{t+1}$。因此我們重新寫出流量設定式：

$$R_{t+1}=\rho P_t^f(\alpha_t-\bar{\alpha})+w_{t+1}+b_{t+1}+\nu_{t+1} \tag{3-10}$$

故運用此模型我們可以解釋爲什麼 R_{t+1} 不與 $L_t(x)$ 正交。而後我們也可以討論從 R_{t+1} 中減去 $\rho P_t^f(\alpha_t-\bar{\alpha})$ 是否與 $L_t(x)$ 正交，或者從 S_t 中減去 N_t 是否與 $L_t(x)$ 正交。然而 α_t 及 N_t 均爲不可觀察的變數，所以我們將設定 state-space 模型，以這兩個變數爲狀態變數，然後使用一般化的 Kalman filter 的技術來估計。

第四節　State-space 模型的設定與估計

首先，設定 State-space 模型：

$$\begin{bmatrix} N_{t+1} \\ \alpha_{t+1}-\bar{\alpha} \\ \alpha_t-\bar{\alpha} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \beta^{-1} & \rho P_t^f & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_t \\ \alpha_t-\bar{\alpha} \\ \alpha_{t-1}-\bar{\alpha} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \nu_{t+1} \\ \varepsilon_{t+1} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4-1}$$

$$\begin{bmatrix} P_t \\ P_t+d_t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \bar{h} & h_0 & h_1 & \cdots & h_q \\ \beta^{-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{t-1} \\ 1 \\ d_t \\ \Delta d_t \\ \Delta d_{t-1} \\ \vdots \\ \Delta d_{t-q+1} \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho P^f_{t-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_t \\ \alpha_t-\bar{\alpha} \\ \alpha_{t-1}-\bar{\alpha} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \delta_t \\ u_t \end{bmatrix} \tag{4-2}$$

其中 $E(\nu_{t+1})=E(\varepsilon_{t+1})=0$。(4-2) 式的上半部即爲 $P_t=P^f_t+N_t+\delta_t$，δ_t 可能含有其他外在因素的干擾項或是投機泡沫。我們假設在無投機泡沫或 $B_0=0$ 之下，$E(\delta_t)=0$。(4-2)式下半部由(3-10)式而來，因此 $u_t=w_t+b_t+\nu_t$ 且仍符合 $E(u_t)=0$ 的假設。

對於 ν_t、ε_t 的其他假設：

$$E(\nu_t\nu_\tau)=\begin{cases} \sigma^2_\nu & \text{，當 } t=\tau \text{ 時} \\ 0 & \text{，其他} \end{cases}$$

$$E(\varepsilon_t\varepsilon_\tau)=\begin{cases} \sigma^2_\varepsilon & \text{，當 } t=\tau \text{ 時} \\ 0 & \text{，其他} \end{cases}$$

而且 ν_t、ε_t 是相關的，由附錄一可知，理論上二者應爲負相關：

$$E(\nu_t\varepsilon_\tau)=\begin{cases} \sigma_{\nu\varepsilon} & \text{，當 } t=\tau \text{ 時} \\ 0 & \text{，其他} \end{cases}$$

同樣，在無投機泡沫下，對於 δ_t、u_t 的假設：

$$E(\delta_t\delta_\tau)=\begin{cases} \sigma^2_\delta & \text{，當 } t=\tau \text{ 時} \\ 0 & \text{，其他} \end{cases}$$

$$E(u_tu_\tau)=\begin{cases} \sigma^2_u & \text{，當 } t=\tau \text{ 時} \\ 0 & \text{，其他} \end{cases}$$

$$E(\delta_t u_\tau)=\begin{cases}\sigma_{\delta u} & \text{，當 } t=\tau \text{ 時} \\ 0 & \text{，其他}\end{cases}$$

但無可避免的（4-1）、（4-2）式的干擾項也會產生相關（證明見附錄一）：

$$E\left\{\begin{bmatrix}\nu_t \\ \varepsilon_t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_\tau & u_\tau\end{bmatrix}\right\}=\begin{cases}\begin{bmatrix}0 & \sigma_{\nu u} \\ 0 & \sigma_{\varepsilon u}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \sigma_\nu^2 \\ 0 & \sigma_{\varepsilon u}\end{bmatrix} & \text{，當 } t=\tau \text{ 時} \\ 0_{2\times 2} & \text{，其他}\end{cases}$$

傳統的 Kalman filter 只考慮 state-space 模型中傳遞方程與觀測方程中之個別的干擾項爲簡單的不相關。其推演現在可參考 Harvey（1989）、Hamilton（1994）。由於上述 state-space 模型對於干擾項的假設與一般的設定爲不相關不同，所以我們採用 Jazwinski（1970）所推導的一般化 Kalman filter 結果來估計。[10] 重新以矩陣符號表示：

$$\xi_{t+1}=\boldsymbol{F}_t\xi_t+\boldsymbol{V}_{t+1} \tag{4-3}$$

$$\boldsymbol{y}_t=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{z}_t+\boldsymbol{H}'_t\xi_t\boldsymbol{W}_t \tag{4-4}$$

（4.3）即是與（4.1）相對應，（4.4）則是與（4.2）相對應。（4-3）式之 $\boldsymbol{\xi}_t$ 爲不可觀察的變數，（4-4）式之 $\boldsymbol{y}_t$ 爲可觀察的變數，$\boldsymbol{z}_t$ 爲外生或已知的變數。（4-3）式爲傳遞方程，表示不可觀察的變數的 the law of motion。（4-4）式爲觀測方程。$\boldsymbol{\xi}_t$, $\boldsymbol{y}_t$, $\boldsymbol{z}_t$ 皆爲向量變數，$\boldsymbol{F}_t$, $\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{H}'_t$ 爲其相對應的係數矩陣，其中 $\boldsymbol{F}_t$, $\boldsymbol{H}'_t$ 在本文中爲隨時間變動（time variant）的係數。對於干擾項 $\boldsymbol{V}_t$, $\boldsymbol{W}_t$ 的假設如下：

$$E(\boldsymbol{V}_t)=0 \quad \text{，當 } t=\tau \text{ 時}$$

$$E(\boldsymbol{V}_t\boldsymbol{V}'_\tau)=\begin{cases}\boldsymbol{Q} & \text{，其他} \\ 0 & \end{cases}$$

10 Anderson and Moore（1979）觀測方程的本期干擾項（$\boldsymbol{W}_t$）與傳遞方程下一期的干擾項（$\boldsymbol{V}_{t+1}$）相關的設定也是簡單 state-space 模型並不適用於我們的情況。

$$E(\boldsymbol{W}_t)=0 \qquad ，當\ t=\tau\ 時$$

$$E(\boldsymbol{W}_t\boldsymbol{W}_\tau')=\begin{cases}\boldsymbol{G} & \\ 0 & ，其他\end{cases}$$

$$E(\boldsymbol{V}_t\boldsymbol{W}_\tau')=\begin{cases}\boldsymbol{S} & ，當\ t=\tau\ 時\\ 0 & ，其他\end{cases}$$

對於 $\boldsymbol{y}_t$ 的估計定義爲 $\hat{\boldsymbol{y}}_{t|t-1}\equiv\hat{E}[\boldsymbol{y}_t|\boldsymbol{z}_t,\ \boldsymbol{Y}_{t-1}]$，故可計算出

$$\hat{\boldsymbol{y}}_{t|t-1}=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{z}_t+\boldsymbol{H}_t'\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t-1}$$

而其 MSE 爲

$$E\left[(\boldsymbol{y}_t-\hat{\boldsymbol{y}}_{t|t-1})(\boldsymbol{y}_t-\hat{\boldsymbol{y}}_{t|t-1})'\right]=E\left\{\left[\boldsymbol{H}_t'(\boldsymbol{\xi}_t-\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t-1})+\boldsymbol{W}_t\right]\left[\boldsymbol{H}_t'(\boldsymbol{\xi}_t-\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t-1})+\boldsymbol{W}_t\right]'\right\}=\boldsymbol{H}_t'\boldsymbol{P}_{t|t-1}\boldsymbol{H}_t+\boldsymbol{H}_t'\boldsymbol{S}+\boldsymbol{S}'\boldsymbol{H}_t+\boldsymbol{G} \tag{4-5}$$

其中 $\boldsymbol{P}_{t|t-1}=E\left[(\boldsymbol{\xi}_t-\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t-1})(\boldsymbol{\xi}_t-\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t-1})'\right]$ 接著我們定義 $\boldsymbol{y}_t$ 估計的 MSE 爲 $\boldsymbol{J}_t\equiv\boldsymbol{H}_t'\boldsymbol{P}_{t|t-1}\boldsymbol{H}_t+\boldsymbol{H}_t'\boldsymbol{S}+\boldsymbol{S}'\boldsymbol{H}_t+\boldsymbol{G}$。接下來化簡 ξ_{t+1} 的則估計式爲：[11]

11
$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t+1|t}&=\hat{E}\left(\boldsymbol{\xi}_{t+1}|\,\boldsymbol{Y}_t\right)\\&=\hat{E}\left(\boldsymbol{F}_t\boldsymbol{\xi}_t+\boldsymbol{V}_{t+1}|\,\boldsymbol{Y}_t\right)\\&=\hat{E}\left(\boldsymbol{F}_t\boldsymbol{\xi}_t|\,\boldsymbol{Y}_t\right)\\&=\boldsymbol{F}_t\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t-1}+\left\{E\left[(\boldsymbol{F}_t\boldsymbol{\xi}_t-\boldsymbol{F}_t\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t-1})(\boldsymbol{y}_t-\hat{\boldsymbol{y}}_{t|t-1})'\right]\right\}\\&\quad\times\left\{E\left[(\boldsymbol{y}_t-\hat{\boldsymbol{y}}_{t|t-1})(\boldsymbol{y}_t-\hat{\boldsymbol{y}}_{t|t-1})'\right]\right\}^{-1}\times(\boldsymbol{y}_t-\hat{\boldsymbol{y}}_{t|t-1})\\&=\boldsymbol{F}_t\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t-1}+\left\{E\left[(\boldsymbol{F}_t\boldsymbol{\xi}_t-\boldsymbol{F}_t\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t-1})\left((\boldsymbol{\xi}_t-\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t-1})'\boldsymbol{H}_t+\boldsymbol{W}_t'\right)\right]\right\}\\&\quad\times\left\{E\left[(\boldsymbol{y}_t-\hat{\boldsymbol{y}}_{t|t-1})(\boldsymbol{y}_t-\hat{\boldsymbol{y}}_{t|t-1})'\right]\right\}^{-1}\times(\boldsymbol{y}_t-\hat{\boldsymbol{y}}_{t|t-1})\\&=\boldsymbol{F}_t\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t-1}+\left\{\left[\boldsymbol{F}_t\left(\boldsymbol{P}_{t|t-1}\boldsymbol{H}_t+\boldsymbol{S}\right)\right]\times\boldsymbol{J}_t^{-1}\times(\boldsymbol{y}_t-\hat{\boldsymbol{y}}_{t|t-1})\right\}\end{aligned}$$

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t+1|t}=\boldsymbol{F}_t\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t-1}+\left\{\left[\boldsymbol{F}_t\left(\boldsymbol{P}_{t|t-1}\boldsymbol{H}_t+\boldsymbol{S}\right)\right]\times\boldsymbol{J}_t^{-1}\times(\boldsymbol{y}_t-\hat{\boldsymbol{y}}_{t|t-1})\right\} \tag{4-6}$$

上式對 $\boldsymbol{\xi}_{t+1}$ 的預測除了使用 the law of motion（即最後式子第一項）外，並使用增加的訊息（$\boldsymbol{y}_t$）做線性最小平方的預測（即最後式子第二項這可參見 Hamilton（1994）第十三章說明。）因此計算 $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t+1|t}$ 的 MSE：[12]

$$\boldsymbol{P}_{t+1|t}=\boldsymbol{F}_t\boldsymbol{P}_{t|t-1}\boldsymbol{F}'_t-\boldsymbol{F}_t\left(\boldsymbol{P}_{t|t-1}\boldsymbol{H}_t+\boldsymbol{S}\right)\boldsymbol{J}_t^{-1}\left(\boldsymbol{P}_{t|t-1}\boldsymbol{H}_t+\boldsymbol{S}\right)'\boldsymbol{F}'_t+\boldsymbol{Q} \tag{4-7}$$

（4-7）式最後一列各項矩陣均爲正限定，而第二項的係數爲負，這是因爲增加了 $\boldsymbol{y}_t$ 的訊息使得估計結果更有效率。

當我們使用最大概似估計時，假設干擾項 $\{\boldsymbol{V}_t, \boldsymbol{W}_t\}_{t=1}^{T}$ 爲多變量的常態分配，因此對於參數的最大概似估計式，即求以下函數的極大：

$$\sum_{t=1}^{T}\ln(f_t) \tag{4-8}$$

其中

$$f_t=-\frac{1}{2}\ln\left[\det\left(\boldsymbol{H}'_t\boldsymbol{P}_{t|t-1}\boldsymbol{H}_t+\boldsymbol{H}'_t\boldsymbol{S}+\boldsymbol{S}'\boldsymbol{H}_t+\boldsymbol{G}\right)\right]$$
$$-\frac{1}{2}\left(\hat{\boldsymbol{y}}_{t|t-1}-\boldsymbol{A}'\boldsymbol{z}_t-\boldsymbol{H}'_t\boldsymbol{\xi}_{t|t-1}\right)'\left(\boldsymbol{H}'_t\boldsymbol{P}_{t|t-1}\boldsymbol{H}_t+\boldsymbol{H}'_t\boldsymbol{S}+\boldsymbol{S}'\boldsymbol{H}_t+\boldsymbol{G}\right)^{-1}$$
$$\times\left(\hat{\boldsymbol{y}}_{t|t-1}-\boldsymbol{A}'\boldsymbol{z}_t-\boldsymbol{H}'_t\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t-1}\right)$$

12 $$\boldsymbol{P}_{t+1|t}=E\left[(\boldsymbol{\xi}_{t+1}-\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t+1|t})(\boldsymbol{\xi}_{t+1}-\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t+1|t})'\right]$$
$$=E\left\{\left[\boldsymbol{F}_t\boldsymbol{\xi}_t+\boldsymbol{V}_{t+1}-\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t+1|t}\right]\left[\boldsymbol{F}_t\boldsymbol{\xi}_t+\boldsymbol{V}_{t+1}-\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t+1|t}\right]'\right\}$$
$$=E\left\{\left[\boldsymbol{F}_t\boldsymbol{\xi}_t+\boldsymbol{V}_{t+1}-\boldsymbol{F}_t\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t-1}-\boldsymbol{F}_t\left(\boldsymbol{P}_{t|t-1}\boldsymbol{H}_t+\boldsymbol{S}\right)\boldsymbol{J}_t^{-1}(\boldsymbol{y}_t-\hat{\boldsymbol{y}}_{t|t-1})\right]\right.$$
$$\left.\times\left[\boldsymbol{F}_t\boldsymbol{\xi}_t+\boldsymbol{V}_{t+1}-\boldsymbol{F}_t\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t-1}-\boldsymbol{F}_t\left(\boldsymbol{P}_{t|t-1}\boldsymbol{H}_t+\boldsymbol{S}\right)\boldsymbol{J}_t^{-1}(\boldsymbol{y}_t-\hat{\boldsymbol{y}}_{t|t-1})\right]'\right\}$$
$$=\boldsymbol{F}_t\boldsymbol{P}_{t|t-1}\boldsymbol{F}'_t-\boldsymbol{F}_t\left(\boldsymbol{P}_{t|t-1}\boldsymbol{H}_t+\boldsymbol{S}\right)\boldsymbol{J}_t^{-1}\left(\boldsymbol{P}_{t|t-1}\boldsymbol{H}_t+\boldsymbol{S}\right)'\boldsymbol{F}'_t+\boldsymbol{Q}$$

令待估參數向量爲 θ，上式中 $\boldsymbol{A}', \boldsymbol{H}'_t, \boldsymbol{F}_t, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{S}$ 均是參數 θ 的函數，因此最大概似估計式即求出 θ 使 $\sum_{t=1}^{T}\ln(f_t)$ 極大。在估計的過程，爲了保證 state-space 模型的共變異數矩陣：

$$E\left\{\begin{bmatrix}\nu_t\\ \varepsilon_t\\ 0\\ \delta_t\\ u_t\end{bmatrix}\cdot[\nu_t \quad \varepsilon_t \quad 0 \quad \delta_t \quad u_t]\right\}=\begin{bmatrix}\sigma_\nu^2 & \sigma_{\nu\varepsilon} & 0 & 0 & \sigma_\nu^2\\ \sigma_{\varepsilon\nu} & \sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 & \sigma_{\varepsilon\nu}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sigma_\delta^2 & \sigma_{\delta u}\\ \sigma_\nu^2 & \sigma_{\nu\varepsilon} & 0 & \sigma_{u\delta} & \sigma_u^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{S}\\ \boldsymbol{S}' & \boldsymbol{R}\end{bmatrix} \quad (4\text{-}9)$$

爲正限定。爲避免估計程式遇到共變異數矩陣爲負時的跳離，所以我們運用 the lower triangular Cholesky factorization 的分解方法

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{S}\\ \boldsymbol{S}' & \boldsymbol{R}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & 0 & 0 & 0 & 0\\ c & b & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & d & 0\\ a & 0 & 0 & e & f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & 0 & 0 & 0 & 0\\ c & b & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & d & 0\\ a & 0 & 0 & e & f\end{bmatrix}'$$

$$=\begin{bmatrix}a^2 & ac & 0 & 0 & a^2\\ ac & c^2+b^2 & 0 & 0 & ac\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & d^2 & de\\ a^2 & ac & 0 & de & a^2+e^2+f^2\end{bmatrix}$$

使得待估參數轉爲 $\beta, \rho, a, b, c, d, e, f$。令 $\theta\equiv[\beta \ \ \rho \ \ a \ \ b \ \ c \ \ d \ \ e \ \ f]'$。因此估計 state-space 模型的各參數，即求 θ 使（4-8）式之概似函數極大。值得說明的是在我們估計的參數中 β 爲股利及誤設部份變動的折現率（前後期關係式），是一個定值，而風險貼水是誤設部份重要的成因是因時而異的。

對於 state-space 模型還有不容易收斂及參數低度認定的問題。Burmeister and Wall（1982）認爲兩者是一體兩面。爲了解模型中參數是否參數設定過多或參數無法完全認定。最簡單的方法是將參數估計值的共變異數矩陣，轉爲相關係數矩陣，然後檢查各參數估計值的相關係數絕對值是否

接近於一(如 0.996)。因爲若產生接近於一的情況，將導致奇異矩陣(singular matrix) 的發生，而導致不容易收斂的問題。這可提供模型設定及估計時的參考。

如前所述，當 R_{t+1} 不與 $L_t(x)$ 正交時，可能存在模型誤設，經我們以 Kalman filter 來推估誤設變數。在得到誤設變數之後，必須再做正交檢定。若去除誤設變數後的流量設定式的正交條件成立，則對模型的修正可以接受；同時若去除誤設變數後的存量設定式的正交條件成立，則可推論股價中不含投機泡沫。將 (4-2) 的觀測方程式與 (2-8)、(3-10) 式比較，我們可得：

$$\delta_t \Leftrightarrow B_t \tag{4-10}$$

$$u_t \Leftrightarrow w_t + b_t + \nu_t \tag{4-11}$$

以下我們稱 δ_t 爲無誤設的存量設定式，u_t 爲無誤設的流量設定式。因此使用一般化 Kalman filter 運用全體樣本資料估計的 smoothed estimators 結果，可以得到

$$\hat{u}_{t|T} = P_t + d_t - \beta^{-1}P_{t-1} - P^f_{t-1}(\hat{a}_{t|T} - \bar{a}) \tag{4-12}$$

$$\hat{\delta}_{t|T} = P_t - P^f_t - \hat{N}_{t|T} \tag{4-13}$$

藉由分析 $\hat{u}_{t|T}$ 和 $L_{t-1}(x)$ 正交與否，可以推論 Malkiel (1979) 和 Pindyck (1984) 提出的股價修正模型是否適合實際資料。若可以得到很好的解釋效果，則可以繼續分析 $\hat{\delta}_{t|T}$ 是否與 $L_t(x)$ 正交，若正交時，我們可以推論股價中不存在投機泡沫。

第五節　實證結果

我們將以兩組資料作實證分析：一組爲 CRSP (the Center for Research in Stock Prices) valued weighting 股價及股利的月資料，期間從 1968 年 1 月到 1992 年 12 月共 300 筆；另一組爲 MSCI (Morgan Stanley's Capital International Perspectives) 之七個國家 (即G7，法國、

德國、義大利、日本、英國、加拿大、美國）的股價股利月資料，有 288 筆。

5.1 CRSP 資料的實證結果

首先討論固定利率無套利模型的檢定。假設固定利率無套利模型成立且模型無誤設，故可直接使用 GMM 來估計β，佐以工具變數估計下式來檢驗（2-1）式：

$$P_t = \beta(P_{t+1} + d_{t+1}) + e_t \tag{5-1}$$

其中 e_t 與 $L_t(x)$ 正交，所以採用 $L_t(x)=\{1, P_{t-i}, d_{t-j} | i=0,1,\ldots,p.\ \ j=0,1,\ldots,q\}$ 爲工具變數，並依據 Hansen（1982）以二階段法估計 β。其中訊息集合我們由二取到四，因爲落後四期以上的價格影響力有限，而股利的影響往往大過一年，所以我們由十二期取到十五期。而檢定時因變數是否爲定態，目前理論並沒有討論，我們擔心結果可能不同，所以我們分對變數差分與否做區別。在理性預期的假設下，e_t 無自我相關，因此再對 e_t 做自我相關檢定，及其高階的自我相關檢定。其結果列於《表一》。在《表一》中的 ρ^* 統計量，檢定一階的自我相關；檢定高階的自我相關，則使用 Box-Pierce 及 Box-Ljung 的 Q^* 統計量來檢定。其結果是拒絕一階的自我相關，但高階的自我相關界於顯著邊緣。Hansen's J test 以 5%的顯著水準來檢定，勉強通過。若繼續檢定虛無假設：$e_t \perp L_t(x)$ ，卻明顯的看出拒絕了正交的虛無假設。因此由於 $\hat{e}_t$ 可能呈現高階自我相關，及 $\hat{e}_t$ 不與 $L_t(x)$ 正交，我們推論固定利率無套利模型無法對 CRSP 股價資料有滿意的解釋，同時使得 β 的估計結果也不具有一致性。因此模型誤設存在，即使檢定 S_t 是否與 $L_t(x)$ 正交，對於投機泡沫的問題，仍不能得到明確的結論。

接下來將使用先前討論的方法，先估計基要價格 P_t^f。但要估計它，須先對股利變數做分析。經檢定股利數列爲 I(1)，所以假設 Δd_t 的隨機行程並估計它的隨機行程係數（$\hat{\phi}$、ϕ_j ($j=1,2,\ldots,q$)）。我們先用 H-Q、AIC 及 Schwartz's SBC 的訊息準則來決定其 AR(q) 之 q 的大小，結果列於《表二》，可知較佳的選擇爲 $q=13$。而 Δd_t 隨機行程的估計結果及檢定也從《表二》可以得知，它到第十三個落後期係數仍然十分顯著。而估計後殘差已不

表一 CRSP 資料估計結果及 e_t 與 $\boldsymbol{L}_t(\boldsymbol{X})$ 的正交檢定

差分	p	q	β	ρ^*	Q^* Box-Pierce	Q^* Box-Ljung	J	Wald test	LM test
否	2	13	0.991	0.024	20.739	21.359	25.371	74.564	33.077
			(0.002)#	[0.683]#	[0 .078]	[0 .066]	[0.045]	[0.000]	[0.005]
是	2	12	0.991	0.024	20.739	21.359	20.739	79.028	26.323
			(0.002)	[0.686]	[0.078]	[0.066]	[0.109]	[0.000]	[0.024]
否	3	15	0.991	0.025	20.688	21.307	31.685	90.025	41.102
			(0.002)	[0.678]	[0.079]	[0.067]	[0.024]	[0.000]	[0.001]
是	3	14	0.990	0.024	20.688	21.307	27.701	97.948	35.701
			(0.002)	[0.686]	[0.079]	[0.067]	[0.049]	[0.000]	[0.005]
否	3	13	0.991	0.024	20.731	21.351	25.658	83.449	33.498
			(0.002)	[0.682]	[0.078]	[0.066]	[0.059]	[0.000]	[0.006]
是	3	12	0.991	0.024	20.731	21.351	22.058	88.553	27.917
			(0.002)	[0.686]	[0.078]	[0.066]	[0.106]	[0.000]	[0.022]
否	4	15	0.991	0.025	20.691	21.311	32.001	101.351	41.888
			(0.002)	[0.679]	[0.079]	[0.067]	[0.031]	[0.000]	[0.002]
是	4	14	0.991	0.024	20.691	21.311	28.215	101.266	38.298
			(0.002)	[0.685]	[0.079]	[0.067]	[0.059]	[0.000]	[0.004]
否	4	13	0.991	0.024	20.733	21.353	26.709	95.428	34.709
			(0.002)	[0.682]	[0.078]	[0.066]	[0.062]	[0.000]	[0.007]
是	4	12	0.991	0.024	20.733	21.353	23.301	98.788	29.519
			(0.002)	[0.687]	[0.078]	[0.066]	[0.106]	[0.000]	[0.021]

（・）爲估計值的標準差。[・] 爲估計值的顯著水準。以下同此定義。

具有任何相關性。接著我們解出 $P_t^f=\bar{h}+h_0d_t+h_1\Delta d_t+h_2\Delta d_{t-1}+\ldots+h_q\Delta d_{t-q+1}$，其中 $\bar{h}$ 及 $h_j\,(j=0,1,2,\ldots,q)$ 皆爲 β、$\bar{\phi}$、$\phi_j\,(j=1,2,\ldots,q)$ 的函數，因此已知 $\bar{\phi}$、ϕ_j，則可簡化爲 β 的函數。故對於 (4-1) 及 (4-2) 式的 state-space 模型的待估參數只剩下 β、ρ、$\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{S}$。在估計的過程，爲了保證 state-space 模型的共變異數矩陣爲正限定，所以運用上一節所提 the lower triangular Cholesky factorization，使得待估參數轉爲 $\beta, \rho, a, b, c, d, e, f$。令 $\theta=[\beta\ \ \rho\ \ a\ \ b\ \ c\ \ d\ \ e\ \ f]'$。因此估計 state-space 模型的各

表二　Δd_t 之 AR(q) 隨機行程的長度 q 的決定與估計與檢定

模型：$\Delta d_t = \bar{\phi} + \phi_1 \Delta d_{t-1} + \phi_2 \Delta d_{t-2} + \ldots + \phi_q \Delta d_{t-q} + e_t$

q	10	11	12	13	14	15	16
H-Q	−0.933	−1.022	−1.055*	−1.054	−1.041	−1.024	−1.012
AIC	−283.508	−309.474	−319.495	−319.504*	−315.889	−311.901	−308.776
SBC	−246.879	−269.219	−275.623	−272.021*	−264.803	−257.219	−257.219

參數	$\bar{\phi}$	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6
估計值	0.119	−1.108	−1.175	−.968	−.886	−.743	−.456
(標準差)	(0.038)	(0.095)	(0.171)	(0.209)	(0.226)	(0.224)	(0.225)
參數	ϕ_7	ϕ_8	ϕ_9	ϕ_{10}	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{13}
估計值	−.314	−.231	0.003	.128	.076	.351	.122
(標準差)	(0.207)	(0.211)	(0.199)	(0.206)	(0.176)	(0.138)	(0.079)

Δd_t 隨機行程之干擾項的自我相關檢定

ρ^*	Q^*	
	Box-Pierce	Box-Ljung
0.005	6.671	6.964
[0.931]	[0.918]	[0.904]

參數，即求 θ 使 (4-8) 式之概似函數極大。我們用 Gauss 程式的 OPTMUM 副程式，以 BFGS 演算法用數值分析的方式來估計參數 θ。並且令 $\xi_0=0$、$\boldsymbol{P}_0=0$。試了多種不同的初始值，找到最好的收斂的結果見《表三》。

在本模型中檢定新設模型是否有更好的解釋能力，主要著重於無誤設的流量設定式 u_{t+1} 的正交檢定，其與 R_{t+1} 不同的地方在於考慮了狀態變數：$(\alpha_t-\bar{\alpha})$。而進行無誤設的存量設定式 δ_t 的正交檢定，則可以推論是否有投機泡沫。先對 u_{t+1} 及 δ_t 做自我相關檢定，結果列於《表四》，由此可以看出以 state-space 模型估計的 β 建構 R_{t+1} 仍界於顯著邊緣，而 u_{t+1} 與 δ_t 並不存在任何自我相關，顯示殘差項不再有系統化的訊息。接著，將 u_{t+1} 與 $L_t(x)$ 做正交檢定。若無誤設的流量設定式正交條件可以接受，則我們認爲新的模型有更好的解釋能力。《表五》就是以 state-space 模型的估計建構 R_{t+1} 以及 u_{t+1} 對不同的 $L_t(x)$ 的正交檢定結果。發現 R_{t+1} 並未與 $L_t(x)$ 正交，而 u_{t+1}

則與 $L_t(x)$ 正交。關於 δ_t 的正交檢定則較複雜，因爲由《表六》可以看出 δ_t 不與 $L_t(x)$ 正交，但卻與 $L_{t-1}(x)$ 正交。若我們推論投機泡沫存在，則 δ_t 是不會與 $L_{t-1}(x)$ 正交。因爲兩期間的投機泡沫是相關的，且投機泡沫包含於股價中，從而包含於 $L_{t-1}(x)$，所以推論投機泡沫存在並不合理。我們重新定義工具變數

$$L_t^*(x)=\left\{1, P_{t-i}, d_{t-j} \middle| i=1,\ldots,p. \quad j=0,1,\ldots,q\right\}$$

$$L_t^{**}(x)=\left\{1, P_{t-i}, d_{t-j} \middle| i=0,1,\ldots,p. \quad j=1,\ldots,q\right\}$$

其中 $L_t^*(x)$ 已去除 P_t，而 $L_t^{**}(x)$ 則不包含 d_t。由《表七》可以看出 δ_t 不與 $L_t^*(x)$ 正交，但卻與 $L_t^{**}(x)$ 正交，因此繼續計算 P_t 與 δ_t 的相關係數爲 -0.0251252、d_t 與的 δ_t 相關係數 -0.2343914。所以我們可以確認前面的推論投機泡沫不存在是可以接受。但 d_t 與 δ_t 有相對較高的相關係數，則是本文

表三　參數 θ 估計結果

β	ρ	a	b	c	d	e	f
0.993	−0.001	1.356	0.017	−43.121	0.734	−9.621	8.774

表四　$\hat{u}_{t+1}$ 與 $\hat{\delta}_t$ 的自我相關檢定

	ρ^*	Q^*	
		Box-Pierce	Box-Ljung
R_{t+1}#	0.031 [0.609]	19.941 [0.097]	20.542 [0.082]
$\hat{u}_{t+1}$	0.021 [0.731]	6.171 [0.941]	6.445 [0.928]
$\hat{\delta}_t$	1.012 [0.839]	7.275 [0.936]	6.556 [0.924]

以 state-space 模型估計的 β 所建構。

表五　R_{t+1} 與 $\hat{u}_{t+1}$ 對不同的 $L_t(x)$ 的正交檢定

	$L_t(x)$			Wald test	LM test
	差分	p	q		
R_{t+1}#	否	2	13	72.541 [0.000]	34.647 [0.003]
	是	2	12	74.549 [0.000]	29.181 [0.011]
	否	3	15	92.401 [0.000]	42.476 [0.001]
	是	3	14	93.508 [0.000]	38.109 [0.002]
	否	3	13	81.667 [0.000]	35.023 [0.004]
	是	3	12	82.309 [0.000]	30.411 [0.011]
	否	4	15	102.957 [0.000]	43.136 [0.001]
	是	4	14	96.581 [0.000]	40.741 [0.002]
	否	4	13	92.749 [0.000]	36.027 [0.005]
	是	4	12	92.011 [0.000]	31.983 [0.011]

以 state-space 模型估計的 β 所建構。

	$L_t(x)$			Wald test	LM test
	差分	p	q		
$\hat{u}_{t+1}$	否	2	13	5.148 [0.991]	12.877 [0.612]
	是	2	12	3.304 [0.998]	12.922 [0.533]
	否	3	15	15.348 [0.638]	15.376 [0.636]
	是	3	14	13.623 [0.694]	15.417 [0.565]
	否	3	13	8.347 [0.938]	13.925 [0.604]
	是	3	12	10.692 [0.774]	14.606 [0.481]
	否	4	15	18.079 [0.517]	16.584 [0.618]
	是	4	14	30.413 [0.034]	30.438 [0.033]
	否	4	13	12.933 [0.741]	15.464 [0.562]
	是	4	12	28.013 [0.032]	29.872 [0.019]

表六　$\hat{\delta}_t$ 對不同的 $L_t(x)$ 的正交檢定

	$L_t(x)$ 差分	p	q	Wald test	LM test
$\hat{\delta}_t$	否	2	13	61762.606 [0.000]	267.771 [0.000]
	是	2	12	58778.377 [0.000]	267.601 [0.000]
	否	3	15	496323.029 [0.000]	269.746 [0.000]
	是	3	14	380606.574 [0.000]	269.759 [0.000]
	否	3	13	61587.972 [0.000]	267.794 [0.000]
	是	3	12	63564.629 [0.000]	267.641 [0.000]
	否	4	15	408826.675 [0.000]	269.761 [0.000]
	是	4	14	534625.527 [0.000]	269.759 [0.000]
	否	4	13	72689.248 [0.000]	267.841 [0.000]
	是	4	12	59246.003 [0.000]	267.654 [0.000]

	$L_{t-1}(x)$ 差分	p	q	Wald test	LM test
$\hat{\delta}_t$	否	2	13	2.359 [1.000]	12.311 [0.655]
	是	2	12	3.796 [0.997]	12.981 [0.528]
	否	3	15	12.831 [0.802]	14.994 [0.662]
	是	3	14	12.061 [0.797]	15.118 [0.587]
	否	3	13	6.767 [0.977]	13.521 [0.634]
	是	3	12	9.816 [0.831]	14.265 [0.506]
	否	4	15	14.832 [0.733]	15.863 [0.666]
	是	4	14	30.677 [0.031]	31.161 [0.028]
	否	4	13	10.605 [0.876]	14.708 [0.616]
	是	4	12	28.678 [0.026]	30.744 [0.015]

無法解釋的，或許可以大膽的解釋爲 P_t^f 中 d_t 所佔的權數（h_0，見（3-3）式）太高之故，然而這仍須要進一步的證明。

總結以上的實證結果顯示，以固定利率無套利模型來解釋 CRSP 股價資料，估計所得到的 R_{t+1} 並不符合其理論上的假設，而是具有可能的高階自我相關以及與訊息集合中之變數不正交。而我們接著使用 Malkiel（1979）和 Pindyck（1984）的模型設定 state-space 模型，以修正後 Kalman filter 估計無誤設的流量設定式 u_{t+1} 與無誤設的存量設定式 δ_t 並加以檢定的結果，發現兩者皆無自我相關且與訊息集合中之變數正交。所以我們推論，Malkiel (1979) 和 Pindyck (1984) 的變動風險貼水股價模型對於 CRSP 的股價資料具有更好的解釋能力，且並無投機泡沫存在的證據。

5.2 MSCI 資料的實證結果

我們將對 MSCI 的股價資料加以分析。首先以固定利率無套利模型來解釋 MSCI 中七個國家的股價資料，即以 GMM 估計 β 參數並檢定這些國家的股價資料是否符合模型要求。結果 Hansen's J test 在 5%的顯著水準下，皆未能通過檢定；同時 R_{t+1} 亦未與 $L_t(x)$ 正交，其 p-value 幾乎接近於 0。

同樣地，我們希望 Malkiel（1979）和 Pindyck（1984）的模型可以適用於這些資料，於是以一般化 Kalman filter 估計 state-space 模型中的狀態變數。但是以最大概似函數法估計各參數時，僅有三個國家（法國、德國、義大利）得到收斂的結果。因此我們就這三個國家的股價資料做進一步檢定。將估計所得的無誤設流量設定式 (u_{t+1}) 對 $L_t(x)$ 做正交檢定，然而其 p-value 仍非常低，所以推論 Malkiel（1979）和 Pindyck（1984）的模型並不適用於法國、德國、義大利等之股價資料，而模型的不適用也可能是估計其他國家的 state-space 模型時參數無法收斂的原因之一。因此對於有無投機泡沫存在這些股價中是無法確定的，而須以其他誤設模型或其他方法加以檢定。

表七 $\hat{\delta}_t$ 對 $L_t^*(x)$ 與 $L_t^{**}(x)$ 的正交檢定

	$L_t^*(x)$			Wald test	LM test
	差分	p	q		
$\hat{\delta}_t$	否	2	13	62825.824 [0.000]	267.739 [0.000]
	是	2	12	59311.505 [0.000]	267.589 [0.000]
	否	3	15	527627.693 [0.000]	269.739 [0.000]
	是	3	14	410601.828 [0.000]	269.753 [0.000]
	否	3	13	63973.711 [0.000]	267.764 [0.000]
	是	3	12	63036.471 [0.000]	267.631 [0.000]
	否	4	15	451392.751 [0.000]	269.753 [0.000]
	是	4	14	544012.653 [0.000]	269.753 [0.000]
	否	4	13	73973.856 [0.000]	267.816 [0.000]
	是	4	12	57637.141 [0.000]	267.646 [0.000]

* $L_t^*(x)$ 中不包含 P_t。

	$L_t^{**}(x)$			Wald test	LM test
	差分	p	q		
$\hat{\delta}_t$	否	2	13	2.381 [1.000]	12.311 [0.722]
	是	2	12	4.032 [0.998]	12.997 [0.603]
	否	3	15	12.911 [0.843]	15.001 [0.723]
	是	3	14	12.026 [0.846]	15.141 [0.652]
	否	3	13	7.147 [0.982]	13.522 [0.701]
	是	3	12	9.941 [0.871]	14.268 [0.579]
	否	4	15	14.926 [0.781]	15.864 [0.725]
	是	4	14	34.382 [0.017]	31.217 [0.038]
	否	4	13	10.795 [0.903]	14.711 [0.682]
	是	4	12	32.511 [0.013]	30.797 [0.021]

* $L_t^{**}(x)$ 中不包含 d_t。

第六節　結論與研究限制及未來研究方向

本文主要目的是研究投機泡沫是否存在於股票價格中。我們考慮模型誤設及投機泡沫若存在，都是不可直接觀察的變數且 state-space 模型中傳遞方程與觀測方程中的干擾項爲同期相關。因此我們必須採用 Jazwinski (1970) 所推導的一般化 Kalman filter 結果來估計。使用 Malkiel (1979) 和 Pindyck (1984) 的變動風險貼水股價模型來解釋股價，依其模型設定誤設變數。在得到誤設變數估計値後，我們沿續 Durlauf and Hooker (1994) 及 Chen (1995) 所提出採用一系列的檢定技術來做分析。然後以得到的無誤設的流量設定式及無誤設的存量設定式做做自我相關檢定以及對訊息集合變數以 Wald test、LM test 做正交檢定。使用資料中 CRSP 及 MSCI 的法國、德國、義大利等股價資料的 state-space 模型估計得到收斂結果，因而就這些資料繼續分析。其中 CRSP 股價資料之無誤設的流量設定式及無誤設存量設定式均接受無自我相關及與訊息集合變數正交的假設，所以推論 Malkiel (1979) 和 Pindyck (1984) 的變動風險貼水股價模型對於 CRSP 的股價資料具有良好的解釋能力，且無投機泡沫存在於股價資料中。但對於 MSCI 資料中法國、德國、義大利之股價資料，其無誤設的流量設定式未與訊息集合變數正交，故 Malkiel (1979) 和 Pindyck (1984) 的模型並未提供更好的解釋，而對於這些股價資料中投機泡沫的存在性並未得到明確的結論。

本文也存在著若干研究限制，或許這些限制的改進也可做爲未來研究的方向：(1) State-space 模型中的變數可能呈現 I(1) 的情況，產生了估計及推論上的疑慮。所以我們在表三的估計得到的參數並沒有列出其標準差及 ρ-value。文獻上對這問題並沒有仔細的探討。然而本文並非以 OLS 來估計，而且 P_t 與 P_t^f、(P_t+d_t) 與 $(\beta^{-1}\cdot P_{t-1})$ 可能是共積的，因而得到的是超一致性的估計値 (super consistent)。我們所關心的問題又是估計後的殘差值加以進一步的正交檢定而不是估計量的探討。這些或許可以稍微排除 I(1) 在估計上的問題，但仍須更嚴謹的探討。(2)模型誤設，我們以 Malkiel (1979) 和 Pindyck (1984) 的變動風險貼水爲出發點，泡沫我們以 Diba and Grossman

(1986) 的泡沫形態爲主，股利的假定後來我們以自我迴歸數列帶入，雖然都有理論根據，而且估計的殘差項都是蠻乾淨的，但畢竟也都是配合模型求解。更廣泛的設定及模型的修改有待進一步的思考。(3)以 Kalman filter 估計 state-space 模型，在估計各參數的過程中，往往因不同初始值而有不同的收斂結果，甚至大部份是不收斂的。這使得估計相當耗時、不科學，也使得部份資料無法估計成功。(3)由於 Malkiel (1979) 和 Pindyck (1984) 的變動風險貼水股價模型無法適用於 MSCI 的資料，而無法得到明確結論，未來可採用其他模型解釋以獲得明確結論。

參考資料

林向愷

1991 〈投資人異質性與股價的決定：台灣的實證分析〉，《經濟論文叢刊》，19:4, 383-411。

Akaike, H.

1973 "Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle," in B.N. Petrov and F.Csaki, eds., *Proc. 2nd International Symposium on Information Theory*, 267-281, Akademiai Kiado, Budapest.

1974 "A New Look at the Statistical Model Identification," *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-19, 716-723.

Anderson, B.D.O. and Moore, J.B.

1979 *Optimal Filtering*, Prentice-Hall: Englewood Cliffs.

Baillie, R.T. and Selover, D.D.

1987 "Co-Integration and Models of Exchange Rate Determination," *International Journal of Forecasting*, 43-51.

Berndt, E., Hall, B., Hall, R. and Hausman, J.A.

1974 "Estimation and Inference in Nonlinear Structure Models," *Annals of Economic and Social Measurement*, 4, 653-665.

Blanchard, O.J. and Watson, M.W.

1982 "Bubbles, Rational Expectations, and Financial Markets," in Paul Wachtel, ed., *Crises in the Economic and Financial Structure*, Lexington Books, 295-315.

Burmeister, E. and Wall, K.D.

1982 "Kalman Filtering Estimation of Unobserved Rational Expectations with an Application on the German Hyperinflation," *Journal of Econometrics*, 20, 255-284.

1987 "Unobserved Rational Expectations and the German Hyperinflation with Endogenous Money Supply," *International Economic Review*, 28, 15-32.

Chen, L.T.

1995 "Essays on Testing for Speculative Bubbles in the Stock Market," the Institute of Economics in Academia Sinica: *Monograph Series No.65*.

Culter, D.M., Poterba, J.M. and Summers, L.H.

1990 "Speculative Dynamics and the Role of Feedback Traders," *American Economic Review*, 80, 63-68.

Diba, B.T. and Grossman, H.I.

1986 "On the Inception of Rational Bubbles in Stock Prices," *NBER Working Paper No.1990*.

1988a "Explosive Bubbles in Stock Prices," *American Economic Review*, 78, 520-530.

1988b "The Theory of Rational Bubbles in Stock Prices," *The Economic Journal*, 98, 746-754.

Durlauf, S.N. and Hooker, M.A.

1994 "Misspecification versus Bubbles in the Cagan Hyperinflation Model," in Colin Hargeaves ed., *Nonstationary Time Series Analysis and Coitegration*, Oxford University Press.

Evans, G.W.

1991 "Pitalls in Testing for Explosive Bubbles in the Asset Prices," *American Economic Review*, 81, 922-930.

Fletcher, R.

1987 *Practical Methods of Optimization*, John Wiley & Sons.

Flood, R.P. and Hodrick, R.J.

1986 "Asset Volatility, Bubbles, and Process Switching," *Journal of Finance*, 41, 831-842.

1989 "Testable Implication of Indeterminacies in Models With Rational Expectation," *NBER Working Paper No.2903.*

Flood, R.P. and Garber, P.M.

1980 "Market Fundamentals versus Price-Level Bubbles: The First Tests," *Journal of Political Economy*, 88, 745-770.

Green, W.

1993 *Econometric Analysis*, Prentice-Hall, Inc.

Hamilton, J.D.

1994 *Time Series Analysis*, Princeton University Press.

Hannan, E.J. and Quinn, B.G.

1979 "The Determination of the Order of an Autoregression," *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 41, 190-195.

Hansen, L.P.

1982 "Large Sample Properties of Generalized Method of Moment Estimators," *Econometrica*, 50, 1029-1054.

Hansen, L.P. and Sargent, T.J.

1980 "Formulating and Estimating Dynamic Linear Rational Expectation Models," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2, 7-46.

Hansen, L.R. and Singleton, K.J.

1982 "Generalized Intrumental Variables Estimation of Nonlinear Rational Expectation Models," *Econometrica*, 50, 1269-1286.

Harvey, A.C.

1989 *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*, Cambridge University Press: Cambridge.

Jazwinski, A.H.

1970 *Stochastic Process and Filtering Theory*, Academic Press, New York.

Kindleberger, C.

1978 *Manias, Panics and Crashes*, New York: Basic Books.

Leroy, S.F. and Porter, R.D.

1981 "The Present-Value Relation: Tsets Based on Implied Variance Bounds," *Econometrica*, 49, 555-574.

Lucas, R.E.

1978 "Asset Prices in an Exchange Economy," *Econometrica*, 46, 1429-1446.

Luenberger, D.G.

1984 *Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley Publishing Company.

Malkiel, B. G.

1979 "The Capital Formation Problem in the United States," *Journal of Finance*, 34, 291-306.

Mankiw, N.G., Romer, D. and Shapiro, M.

1985 "An Unbiased Reexamination of Stock Market Volatility," *Journal of Finance*, 40, 677-689.

Minsky, H.P.

1982 *Can 'It' Happen Again? Essays on Instability and Finance*, M.E. Sharpe, Inc.

O'Connell, S.A. and Zeldes, S.P.

1988 "Rational Ponzi Game," *International Economic Review*, 29, 431-450.

Ogaki, M.

1993 "Generalized Method of Moments: Econometric Application," in G.S. Maddala, C.R. Rao and H.D.Vinod, eds., *Handbook of Statistics*, 11, Elsevier Science Publishers B.V.

Pindyck, R.S.

1984 "Risk, Inflation and the Stock Market," *The American Economic Review*, 335-351.

Pittis, N.

1993 "On the Exchange Rate of the Dollar: Market Fundematals versus Speculative Buvvles," *the Manchester School*, LXI, 167-184.

Poterba, J.M. and Summers, L.H.

1986 "The Persistence of Volatility and Stock Market Fluctuations," *American Economic Review*, 76, 1141-1151.

Schwartz, G.

1978 "Estimation the Dimension of a Model, *Ann. Statist.*, 6, 461-464.

Shiller, R.J.

1981 "Do Stock Prices Move Too Much to be Justified by Subsequent Changes in Dividends?" *American Economic Review*, 71, 421-436.

1984 "Stock Prices and Social Dynamics," *Brooking Papers on Economic Activity*, 2, 459-498.

Tirole, J.

1985 "Asset Bubbles and Overlapping Generations," *Econometrica*, 53, 1499-1528.

Topol, Richard

1991 "Bubbles and Volatility of Stock Prices: Effect of Mimetic Contagion," *The Economic Journal*, 101, 786-800.

West, K.D.

1987 "A Specification Test for Speculative Bubbles," *Quarterly Journal of Economics*, 102, 553-580.

1988 "Dividend Innovations and Stock Price Volatility," *Econometrica*, 56, 37-61.

Wu, Y.

1995 "Are there Rational Bubbles in Foreign Exchange Markets? Evidence from an Alternative Test," *Journal of International Money and Finance* 14, 27-46.

附錄：State-space 模型干擾項關係證明

〔命題〕State-space 模型如（4-1）及（4-2）式，其中 ν_{t+1} 的定義如（3-7）式、ε_{t+1} 定義如（3-9）式、δ_{t+1} 為外來干擾因素，則

1. $E[\nu_t \varepsilon_t] \neq 0$
2. δ_t 與 ν_t、ε_t 不相關
3. u_t 與δ_t 相關
4. u_t 與 ν_t、ε_t 相關。

證明：

1. $E[\nu_t \varepsilon_t] \neq 0$，由 ν_{t+1} 及 ε_{t+1} 的定義可計算

$$
\begin{aligned}
E(\nu_t \varepsilon_t) = & E\left\{E_t\left[\sum_{i=1}^{\infty} -\beta^i \left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta^{k+1} d_{t+i+k}(\alpha_{t+i}-\bar{\alpha})\right)\right] \times \varepsilon_t \right. \\
& \left. -\beta^{-1} E_{t-1}\left[\sum_{i=2}^{\infty} -\beta^i \left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta^{k+1} d_{t-1+i+k}(\alpha_{t-1+i}-\bar{\alpha})\right)\right] \times \varepsilon_t \right\} \\
= & E\left\{\left[\sum_{i=1}^{\infty} -\beta^i \left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta^{k+1} (E_t d_{t+i+k}) \rho^i (\alpha_t-\bar{\alpha})\right)\right] \times \varepsilon_t \right\} \\
= & E\left\{\left[\sum_{i=1}^{\infty} -\beta^i \left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta^{k+1} (E_t d_{t+i+k}) \rho^i (\rho(\alpha_t-\bar{\alpha})+\varepsilon_t)\right)\right] \times \varepsilon_t \right\} \\
= & \sum_{i=1}^{\infty} \beta^{i-1} \rho^i E\left[P^f_{t+i-1}\right] \sigma^2_\varepsilon
\end{aligned}
$$

因此，當 Δd_t 為恆定的、d_0 已知，且 $\rho \neq 0$、$\sigma^2_\varepsilon \neq 0$，則 $E[\nu_t \varepsilon_t] \neq 0$。另外若 $\rho > 0$，則 $E[\nu_t \varepsilon_t] < 0$。

2. δ_t 與 ν_t、ε_t 不相關

因為假設 δ_t 為外來的干擾因素，故設定 δ_t 與 ν_t、ε_t 不相關。

3. u_t 與 δ_t 相關

外來的干擾因素影響 P_t，故同時影響 u_t 與 δ_t ，使其產生相關。

4. u_t 與 ν_t、ε_t 相關

由（2-7）及（3-10）式可知

$$P_t + d_t = \beta^{-1}P_{t-1} + N_t - \psi^{-1}N_{t-1} + w_t + b_t$$

因此 $u_t = N_t - \psi^{-1}N_{t-1} - \rho P^f_{t-1}(\alpha_{t-1} - \bar{\alpha}) + w_t + b_t$

$$= \nu_t + w_t + b_t$$

假設 ε_t 與 w_t、ε_t 與b_t、ν_t 與 b_t 無關，所以

$$E(\nu_t w_t) = E\left\{\left[\sum_{i=1}^{\infty} - \beta^i\left[\sum_{k=0}^{\infty}\beta^{k+1}\left(E_t d_{t+i+k}\right)\rho^i\left(\rho(\alpha_{t-1} - \bar{\alpha}) + \varepsilon_t\right)\right]\right] \times w_t\right\}$$

$$= 0,$$

故

$$E[\nu_t u_t] = \sigma^2_\nu$$

$$E[\varepsilon_t u_t] = \sigma_{\varepsilon\nu}。$$

Model Misspecification and Speculative Bubbles: A Generalized Kalman Filter Analysis

Chien-fu Jeff Lin
Economics Department, National Taiwan University
Lii-tarn Chen
Institute of Economics, Academia Sinica
Ming-huang Lee
Economics Department, National Taiwan University

ABSTRACT

This paper examines whether bubbles or time-varying risk premiums affect stock prices. A model with speculative bubbles and misspecifications, factors unobserved in stock prices, is considered. The setting of a time varying risk premium proposed by Malkiel (1979) and Pindyck (1984) is applied to capture the possibility of misspecification. The errors in the measurement equation and transition equation in the state-space model are correlated. Thus, we employ the generalized Kalman filter developed by Jazwinski (1970) to estimate the parameters. After we get the estimates, we follow the orthogonality test discussed in Durlauf and Hooker (1994) and Chen (1995) to analyze the flow and stock constraints on different information sets. The results show that the time varying risk premium model provides a good explanation for the CRSP data set and there is no presence of speculative bubbles. The France, German, and Italy in MCSI data sets indicate that the time varying premium model does not provide a suitable explanation. No further conclusion can be drawn for whether or not speculative bubbles exist in these three countries.

Key Words: Model misspecification, Speculative bubbles, Orthogonality test, Time varying risk premium, Generalized Kalman filter.