課程簡介：辛幾何導論

蔡忠潤

August 27, 2013

這份極簡短的筆記約莫是第一周課程的概述；這意味著細節只會出現在課堂上，而不會出現在這份筆記中。§1 是辛幾何起源的簡介；§2 簡述了一些當代的發展；§3 是這堂課計畫要教的內容。

1 起源：古典力學

漢米爾頓力學（Hamiltonian mechanics）是古典力學（classical mechanics）的重新表述，它由拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）演變而來。

1.1 拉格朗日力學

拉格朗日力學假定力學系統的運動狀態由一個位置坐標 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 和速度 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ 的函數描述：

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \text{ 。}$$

最傳統的例子 $L(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ 是 $\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2$ 減去位能函數 $V(\mathbf{x})$。而在系統中運動的粒子 $\mathbf{x}(t) : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ 它的作用量是

$$\mathcal{I}(\mathbf{x}(t)) = \int_0^1 L(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))\, \mathrm{d}t \tag{1}$$

根據最小作用量原理，系統內粒子若從 $\mathbf{p}$ 移動到 $\mathbf{q}$，它會隨著最小作用量的路徑移動。因此，粒子的運動滿足作用量的變分方程（variantional equation or Euler–Lagrange equation）。透過直接的計算，變分方程是下列 n 個二階方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial v^j} - \frac{\partial L}{\partial x^j} = 0 \qquad \text{for } j \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ 。} \tag{2}$$

1.2 漢米爾頓力學

如果透過勒壤得轉換（Legendre transform），用下列座標

$$(x^j, y^j = \frac{\partial L}{\partial v^j}) \tag{3}$$

來描述力學系統；所得到的力學表述便是漢米爾頓力學。也就是說，將 $\mathbf{v}$ 視爲 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 的函數。而函數 $L(\mathbf{x},\mathbf{v})$ 將轉換爲另一個函數：漢米爾頓量（Hamiltonian）

$$H(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \langle \mathbf{y},\mathbf{v}\rangle - L(\mathbf{x},\mathbf{v}) \text{ 。} \tag{4}$$

運動方程式 (2) 會轉換爲下列 $2n$ 個一階方程式:

$$\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial y^j} \text{ ,} \qquad \frac{\mathrm{d}y^j}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial x^j} \text{ 。} \tag{5}$$

漢米爾頓力學有以下的特點:

(i) 二階方程式化成了一階方程式，雖然方程式不一定會變得比較容易解;

(ii) 漢米爾頓力學中 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 的角色比較對稱;

(iii) 利用 (5)，很容易得知 $H(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 在粒子的運動軌跡上是常數。

1.3 辛幾何

用現代數學的語言來說，漢米爾頓力學的設定是 $(\mathbb{R}^{2n}, \omega = \sum_{j=1}^n \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}y^j, H(\mathbf{x},\mathbf{y}))$，而運動方程式 (5) 就是下列向量場

$$X_H = \omega^{-1}(\mathrm{d}H) = \sum_{j=1}^n \big(\frac{\partial H}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{\partial H}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^j}\big)$$

的流方程（flow equation）。在經過一番發展之後，研究一個閉且非退化的二次式（如上方的 ω）的幾何成爲現在辛幾何的主要課題。

2 當代的發展

這一節簡述了一些當代的發展；這堂課只會觸及其中的極小部分。基本上這一節可以看作是這堂課後續的延伸題材。

2.1 symplectic 一字的由來

在簡介現在的發展之前，我們先介紹 symplectic 這個字的來源。一般英文字典上面的定義是魚頭骨的某部份；這和辛幾何完全沒有關聯。這裡所使用的 symplectic 一字是由 Hermann Weyl [W, ch.VI] 發明的。原本，他想把保持 $\omega = \sum_{j=1}^n \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}y^j$ 的線性變換群命名爲 line complex[1] group。但這裡的 complex 並不是指 complex number；爲了避免混淆，他把 complex 的拉丁字根換成相對應的希臘字根而成爲現在的 symplectic 一字。

complex 一字來自於拉丁文的 *com-plexus*，意思是 plaited/braided[2]-together。換成希臘文後變成 *sym-plektikos*，就成爲現在使用的 symplectic 一字。從現在的發展來看，這命名也恰好反映了辛幾何和複幾何密切的關聯。

[1]關於 line complex 可參考第一次 Homework。

[2]這兩個字作爲動詞表示編織、編製。

2.2 當代的發展

一個 $2n$ 維流形 M 和上面的一個閉且非退化的二次式[3] ω 稱做一個*辛流形*；而 ω 稱作*辛結構*。辛幾何的研究的主要課題就是要瞭解辛流形，下列是一些核心的問題:

(i) 什麼樣的微分流形會是辛流形？如何區分不同的辛結構？

(ii) 如在 §1.2 中，給定 M 上的一個函數 H，我們可以考慮 $\omega^{-1}(\mathrm{d}H)$ 的運動方程式。我們希望對它的閉軌道（closed orbit）有所瞭解。

(iii) 保持辛結構的微分同胚稱作*辛同胚*。

  (a) 固定一個辛流形，它的辛自同胚是否一定有「很多」不動點？

  (b) 對於一個歐式空間的標準球，它在辛同胚之下是否可以變得又長又扁？(這對於瞭解 ω 這個「二維測度」和體積元的差異上，是一個根本的問題。)

下面列出了一些當代的重要發展，它們是這堂課後續的延伸題材。換言之，這些題材幾乎都超出了這堂課設定的範圍。

(i) Gromov [Gr] 引入了擬全純曲線（pseudoholomorphic curve）的技巧來研究辛流形，這是現在研究辛結構最主要的方法。粗略地說，這是利用代數曲線來研究代數流形、或是利用極小曲面來研究黎曼流形的推廣。後來 Floer [F] 更把它推廣並打造成一套同調論。

(ii) Taubes [T1, T2] 在四維辛流形上研究某組規範場論方程，得到了許多對於四維辛流形的深刻結論。

(iii) Donaldson [D1, D2] 引入複幾何的技巧（Kodaira 消沒定理和嵌入定理）來研究辛流形，並對於辛流形的拓樸結構有另一種角度的了解。

(iv) 另一個課題是和鏡流形（Mirror manifold）相關的研究。Strominger、Yau 和 Zaslow 的猜想 [SYZ] 是一個主要的方向，當中的幾何構造和 §1 息息相關。

3 課程大綱

下列是這堂課計畫要教的內容，在第一次上課會有較多的說明。

(i) 辛流形的基本性質和一些局部定理。

(ii) 有群作用（或群對稱）的辛流形: moment map、symplectic reduction、convexity theorem、Delzant's theorem。

(iii) 一些辛流形的構造: Kodaira–Thurston manifold and generalizations、Gompf's fiber sum、some other surgeries.

(iv) nonsqueezing theorem、capacities、some contact geometry。

[3] 亦即 $\mathrm{d}\omega = 0$ 且 ω^n 是一個體積元。

其中 (i)、(ii) 和 (iii) 大致上是會照順序進行，而 (iv) 當中的題材會視狀況來決定。

(i) 的主要參考書是 [CdS1]；(ii) 的主要參考書是 [CdS1, CdS2]；(iii) 和 (iv) 的主要參考書是 [MS]。

References

[CdS1] A. Cannas da Silva, *Lectures on symplectic geometry*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1764, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[CdS2] ———, *Symplectic toric manifolds*, Symplectic geometry of integrable Hamiltonian systems (Barcelona, 2001), Adv. Courses Math. CRM Barcelona, Birkhäuser, Basel, 2003, pp. 85–173.

[MS] D. McDuff and D. Salamon, *Introduction to symplectic topology*, 2nd ed., Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998.

[D1] S. K. Donaldson, *Symplectic submanifolds and almost-complex geometry*, J. Differential Geom. **44** (1996), no. 4, 666–705.

[D2] ———, *Lefschetz pencils on symplectic manifolds*, J. Differential Geom. **53** (1999), no. 2, 205–236.

[F] A. Floer, *Morse theory for Lagrangian intersections*, J. Differential Geom. **28** (1988), no. 3, 513–547.

[G] H. Geiges, *An introduction to contact topology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 109, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[Gr] M. Gromov, *Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. **82** (1985), no. 2, 307–347.

[SYZ] A. Strominger, S.-T. Yau, and E. Zaslow, *Mirror symmetry is T-duality*, Nuclear Phys. B **479** (1996), no. 1-2, 243–259.

[T1] C. H. Taubes, *The Seiberg-Witten invariants and symplectic forms*, Math. Res. Lett. **1** (1994), no. 6, 809–822.

[T2] ———, *Seiberg Witten and Gromov invariants for symplectic 4-manifolds*, First International Press Lecture Series, vol. 2, International Press, Somerville, MA, 2000. Edited by Richard Wentworth.

[W] H. Weyl, *The Classical Groups. Their Invariants and Representations*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1939.