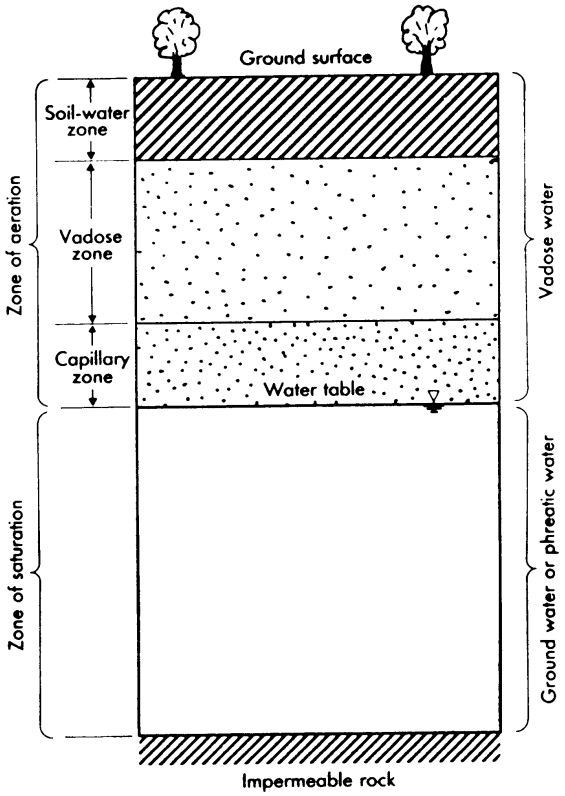
第八章 地下水水文學

§8.2 地下水特性 Properties of Ground Water

§ 地下水的垂直分佈



地下水可分為兩大類：

1. **未飽和層**：a.根系層或土壤水分層，b.重力層，c.毛細水層；根系層與重力層合稱**通氣層**
2. **飽和層**：a.自由含水層或非拘限含水層，b.阻水層或難透水層，c.拘限含水層或受壓含水層

未飽和層 unsaturated zone：土壤水份的壓力為負（即張力）的含水層；水流主要方向為垂直。

飽和層 saturated zone：土壤水份壓力為正值的含水層；水流主要方向為水平。

根系層 root zone 或土壤水分層 soil moisture zone：未飽和層中接近地表，植物根系可達的區域，根系層內影響水流的除了水力平衡和土壤水力特性之外，植物根系吸水能力和地表天氣狀況，植物葉面蒸散情形亦是重要因素。

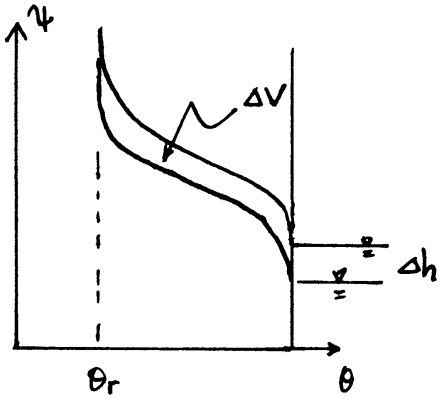
重力層 gravitational zone：植物根系無法達到深度的未飽和層，影響水流的主要因素為重力與土壤水力特性。

毛細水層 capillary fringe：在地下水水面（groundwater table）之上因為毛細作用力而上揚的水層。在毛細水層中土壤為飽和狀態，但水分子之間的作用力為張力而非壓力。

§ 含水層或飽和含水層（aquifer）

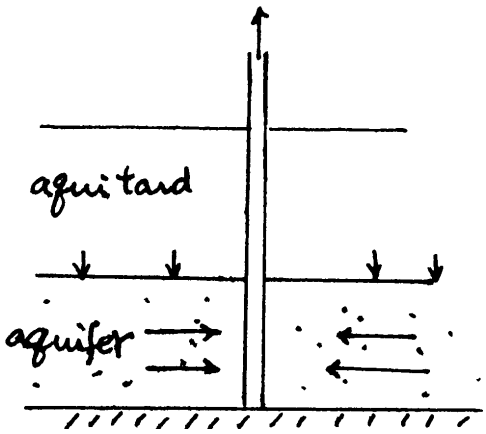
含水層地質必須有充份的可透水材料，可由井或泉出相當水量。

含水層又可分為**自由（或非拘限）含水層**和**拘限（或受壓）含水層**以**是否有水面**和**在含水層上邊界總水頭是否與重力水頭相同**來區分。



自由含水層 unconfined aquifer：有自由水面，並且總水頭與水面位置相同。

拘限含水層 confined aquifer：無自由水面，且在含水層的上邊界壓力水頭大於零。



阻水層 aquiclude：和含水層相比為非常不透水的拘限地質層，主要土壤成份通常是黏土和粉砂。

難透水層 aquitard：透水性比含水層差，但比阻水層好，水要穿過難透水層要非常久，量非常小，但在附近含水層水頭降低時滲漏供水給含水層，在此一情形下，雖然供水速率慢，但面積大，因此量有時也不可忽略。

比出水量 specific yield：一個自由含水層在單位面積、單位總水頭降低所釋放的水量，如右圖 $S_y = \dfrac{\Delta V}{A\Delta h}$。細顆粒的土壤通常 S_y 較小，而粗顆粒的 S_y 較大，因此粗顆粒的土層較合適作為”含水層”。

表 8.1 為各種不同透水料質的孔隙率。由表可知粗顆粒土壤的孔隙率 η 未必大於細顆粒土壤，有效孔隙率較大的原因，主要是粗顆粒的殘餘含水量 θ_r 較小。除含水層外，飽和層地下水區域內另有阻水層（或不透水層，aquiclude）和難透水層（aquitard）兩種水文地質層分類。

TABLE 8.1

Representative Values of Porosity* (2)

MATERIAL	POROSITY (%)	MATERIAL	POROSITY (%)
Gravel, coarse	28†	Loess	49
Gravel, medium	32†	Peat	92
Gravel, fine	34†	Schist	38
Sand, coarse	39	Siltstone	35
Sand, medium	39	Claystone	43
Sand, fine	43	Shale	6
Silt	46	Till, predominantly silt	34
Clay	42	Till, predominantly sand	31
Sandstone, fine-grained	33	Tuff	41
Sandstone, medium-grained	37	Basalt	17
Limestone	30	Gabbro, weathered	43
Dolomite	26	Granite, weathered	45
Dune sand	45		

* After Morris and Johnson, 1967.

† These values are for repacked samples; all others are undisturbed.

地下水各種水層和水井特性的示意圖如下。下圖顯示三種水井：（1）自由含水層水井（water table well）（2）受壓（或拘限）含水層水井（artesian well）和（3）自流井或泉（flowing well）。

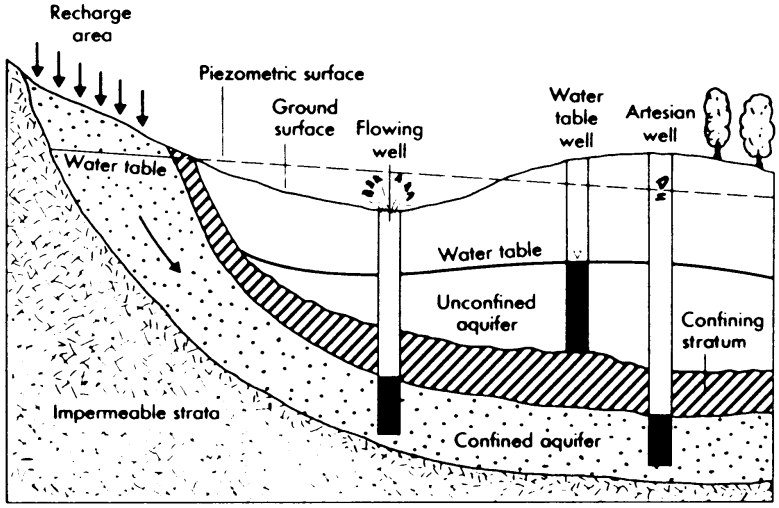


FIGURE 8.7

Schematic cross section illustrating unconfined and confined aquifers.

(1) 自由含水層水井：自由水面由地表降雨—入滲所造成，在此一層的水井，井內水深和自由水面等高。

(2) 受壓水層水井：水井水深反映受壓水層的總水頭，若此一總水頭高於地表高層，則形成自流井。

壓力水頭面（piezometric surface or potentiometric surface）：即受壓水層的靜水壓總水頭高度面。若一受壓水層的壓力水頭面低於上拘限層（upper confining bed）的底部，即變為非拘限含水層。

貯蓄係數 S（storage coefficient）：自由含水層或受壓含水層單位面積—單位壓力水頭變化的出水體積（無因次）。在受壓含水層中，貯蓄係數值的範圍常在 0.00005 到 0.005 之間；而自由含水層的貯蓄係數即為比出水量（specific yield），一般自由含水層比出水量和貯蓄係數值約在 7%～25%之間。

§土壤顆粒徑分佈和土壤分類

土壤顆粒徑分佈分析的方法主要有兩個步驟，先以搖篩機篩過，通過 200 號篩的（d<0.05mm）土壤再用比重瓶分析。依照顆粒大小沉降速度不同，以及懸浮載（suspended load）造成水比重變化的原理，將細粒土壤與水在比重瓶中充份混合後靜置，以比重計量測和懸浮載的液體比重隨時間變化情形，估計各細粒土壤的體積比。

TABLE 8.2

Soil Classification Based on Particle Size*

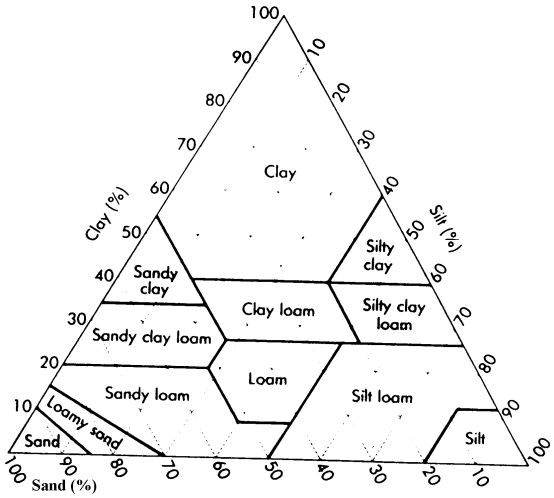
MATERIAL	PARTICLE SIZE (mm)
Clay	<0.004
Silt	0.004–0.062
Very fine sand	0.062–0.125
Fine sand	0.125–0.25
Medium sand	0.25–0.5
Coarse sand	0.5–1.0
Very coarse sand	1.0–2.0
Very fine gravel	2.0–4.0
Fine gravel	4.0–8.0
Medium gravel	8.0–16.0
Coarse gravel	16.0–32.0
Very coarse gravel	32.0–64.0

* After Morris and Johnson, 1967.

土壤分類最常用的方法是三角圖，如右，以黏土、粉沙土（或泥質土）和沙的體積比例決定分類。

例；30% clay + 60% silt + 10% sand

⇒為 silty clay loam



§8.3 地下水流動

§達西定律

Henri Darcy 1856 年發表地下水流動最重要的原則：

1. $Q \propto \Delta h$：流量和水頭損失成正比

2. $Q \propto \dfrac{1}{\Delta L}$：流量和水流路徑長度成反比

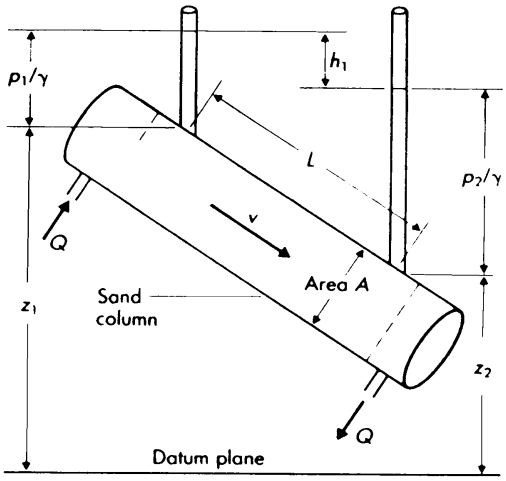


FIGURE 8.8
Head loss through a sand column.

由上圖和伯努利（Bernoulli）定律：

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+Z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+Z_2+h_1 \qquad \gamma=\rho_w\cdot g$$

由於在地下水流動問題中$\dfrac{V^2}{2g}$速度水頭項一般均很小，所以通常將速度水頭忽略不計，因此整理後可得：

$$h_1=\left(\frac{P_1}{\gamma}+Z_1\right)-\left(\frac{P_2}{\gamma}+Z_2\right)$$

由達西定律可知

$$V=+\frac{Q}{A}=-K\frac{dh}{dL}$$

K 為水力傳導係數（hydraulic conductivity），表示土壤的透水性質，對特定土壤，在飽和情形下，K 為定值，負號代表水流方向和水頭坡降方向相反。

以上達西定律中的流速為整個截面的平均速度，但事實上水流僅在孔隙中流動，若要估計孔隙中實際水流速度，則$V_S=\dfrac{Q}{\eta A}$，η=孔隙率。

達西定律只適用於層流（laminar flow），由實驗証明達西定律在雷諾數小於”1”時成立（即$Q \propto \Delta h$，$Q \propto \frac{1}{\Delta L}$），但有時$1 \le R_e \le 10$也能成立。對於孔隙介質雷諾數

$$R_e = \frac{\rho V L}{\mu} \qquad V = \text{平均流速，} L = \text{代表性長度}$$

對土壤而言L定義常用d_{10}

§水力傳導係數

水力傳導係數的值變化範圍非常大，自然界部份土壤與岩石的K值如右表。

由理論分析可得

$$K = k\frac{\rho g}{\mu}$$

其中k為內在滲透係數，只與土壤有關，和流體無關，石油業常用k而不用K。

TABLE 8.3
Representative Values of Hydraulic Conductivity

UNCONSOLIDATED SEDIMENTARY DEPOSITS	HYDRULIC CONDUCTIVITY K (cm/sec)
Gravel	3.0 to 3×10^{-2}
Coarse sand	6×10^{-1} to 9×10^{-5}
Medium sand	5×10^{-2} to 9×10^{-5}
Fine sand	2×10^{-2} to 2×10^{-5}
Silt, loess	2×10^{-3} to 1×10^{-7}
Till	2×10^{-4} to 1×10^{-10}
Clay	5×10^{-7} to 1×10^{-9}
Unweathered marine clay	2×10^{-7} to 8×10^{-11}
SEDIMENTARY ROCKS	
Karst limestone	2 to 1×10^{-4}
Limestone and dolomite	6×10^{-4} to 1×10^{-7}
Sandstone	6×10^{-4} to 3×10^{-8}
Shale	2×10^{-7} to 1×10^{-11}
CRYSTALLINE ROCKS	
Permeable basalt	2 to 4×10^{-5}
Fractured igneous and metamorphic	3×10^{-2} to 8×10^{-7}
Basalt	4×10^{-5} to 2×10^{-9}
Unfractured igneous and metamorphic	2×10^{-8} to 3×10^{-12}
Weathered granite	3×10^{-4} to 5×10^{-3}

Note on units: 1 m/sec = 1×10^{-2} cm/sec = 3.28 ft/sec = 1.04×10^{5} darcy

導水係數（Transmissivity）：專針對拘限含水層而言，為K乘以含水層厚度的值。

$$[K] = \frac{L}{T}\ ;\ [T] = \frac{L^2}{T}\ ;\ [k] = L^2 \text{ 或 Darcy，} 1\,\text{Darcy} = 0.987(\mu\text{m})^2$$

§水力傳導係數的決定

水力傳導係數的決定可分為在

(1) 實驗室中的量測方法：

a. 定水頭實驗機（constant head method）

b. 變水頭實驗　（falling head method）

(2) 在野外的量測方法：

a. 抽水實驗　　（pumping test）

b. 微水實驗　　（slug test）

c. 示蹤劑實驗　（tracer test）

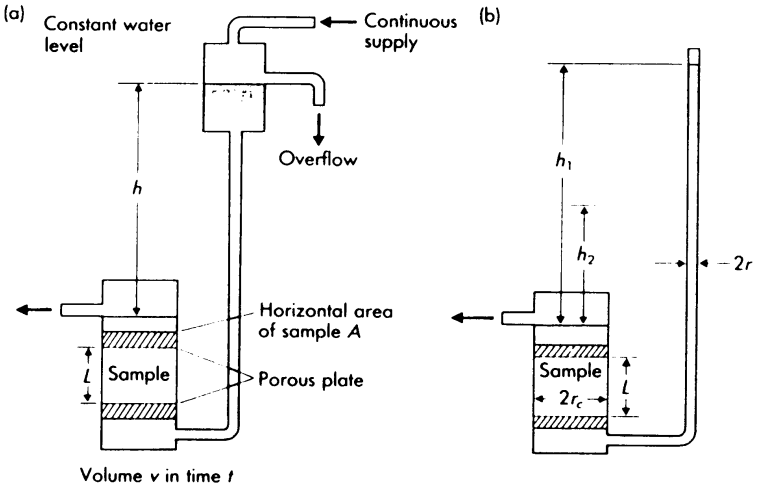


FIGURE 8.9

Permeameters for measuring hydraulic conductivity of geologic samples. (a) Constant head. (b) Falling head.

在定水頭實驗中　$K = \dfrac{VL}{Ath}$　　V =時間 t 之內的流通體積

在變水頭實驗中　$Q = \pi r^2 \dfrac{dh}{dt}$

達西定律　$Q = \pi_c^2 K \dfrac{h}{L}$

$$\Leftrightarrow K = \frac{r^2 L}{r_c^2 t} \ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right)$$

其中 t 為由 h_1 變為 h_2 的時間間距

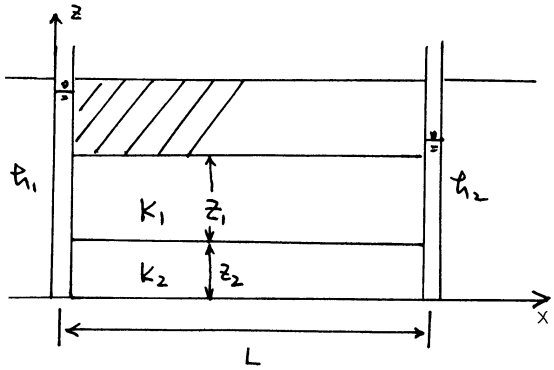
野外現地實驗的微水實驗的一種是鑽孔實驗（Auger hole test）。其原理是用一種比鑽孔直徑略小的棍棒插入鑽孔中，將鑽孔內的水排擠出鑽孔達到平衡後，快速將棍棒抽出，並量測鑽孔中水位回復的速度。或是在鑽孔中加水，觀察水位回復的速度，計算水力傳導係數 K 。

抽水實驗是在一個抽水井附近鑿幾個水位觀測井，在抽水井中連續抽水，並記錄觀測井中水位隨時間變化的情形，估計水井附近區域的水力傳導係數 K 值。

野外現地實驗所得的K值和將土樣取回實驗室量測的K值往往有很大的差異，通常較取信野外實驗的K值。

§非等向性含水層

由於地質結構常呈層狀分佈，因此導致值的非等向性，以一個兩層的地質為例作一說明：



由達西定律考慮二維的情形

$$Q_1 = Z_1 K_1 \cdot \frac{h_1 - h_2}{L}$$

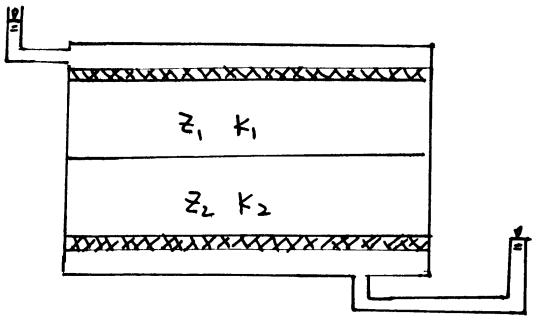
$$Q_2 = Z_2 K_2 \cdot \frac{h_1 - h_2}{L}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = (Z_1 K_1 + Z_2 K_2)\frac{h_1 - h_2}{L}$$

$$= (Z_1 + Z_2)\overline{K}_x \frac{h_1 - h_2}{L}$$

$$\Rightarrow \overline{K}_x = \frac{Z_1 K_1 + Z_2 K_2}{Z_1 + Z_2} \qquad \text{若為多層} \Rightarrow \overline{K}_x = \frac{\sum (Z_i K_i)}{\sum Z_i}$$

若在垂直方向流動，則形成類似 Green-Ampt 問題中的 2-layer 情形，唯此處是飽和地下水的問題。



在右側兩層透水層的實驗中，通過Z_1的流量和通過Z_2的流量相等，但由於兩者的K值不同，因此水頭損失不同。假設單位面積流量為q_z

$$\Rightarrow q_z = K_1 \frac{\Delta h_1}{Z_1} \qquad \Rightarrow q_z = K_2 \frac{\Delta h_2}{Z_2}$$

總水頭損失$\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2 = q_z \left(\frac{Z_1}{K_1} + \frac{Z_2}{K_2} \right)$ (1)

令平均垂直方向 K 值為 $K_z \Rightarrow q_z = K_z \cdot \dfrac{\Delta h_1 + \Delta h_2}{Z_1 + Z_2}$

$$\therefore \Delta h_1 + \Delta h_2 = q_z \cdot \left(\frac{Z_1 + Z_2}{K_z} \right) \qquad (2)$$

$(1) = (2) \quad \therefore K_z = \left(\dfrac{Z_1 + Z_2}{Z_1/K_1 + Z_2/K_2} \right) \qquad$ 若多層 $\Rightarrow K_z = \dfrac{\sum Z_i}{\sum \left(Z_i / K_i \right)}$

由是可見 $K_x \neq K_z$

假設 $Z_1 = 2Z_2 \qquad K_1 = 10K_2$

$$\Rightarrow K_x = \frac{K_1 Z_1 + K_2 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{20K_2 Z_2 + K_2 Z_2}{3Z_2} = 7K_2$$

$$K_z = \left(\frac{Z_1 + Z_2}{\left(Z_1/K_1 \right) + \left(Z_2/K_2 \right)} \right) = \frac{3Z_2}{\frac{1}{5}\frac{Z_2}{K_2} + \frac{Z_2}{K_2}} = \frac{15}{6} K_2 = 2.5K_2$$

對於沖積層而言，K_x/K_z 之值常介於 2～10 之間，若有黏土層出現，則 K_x/K_z 值可達 100。

§流網

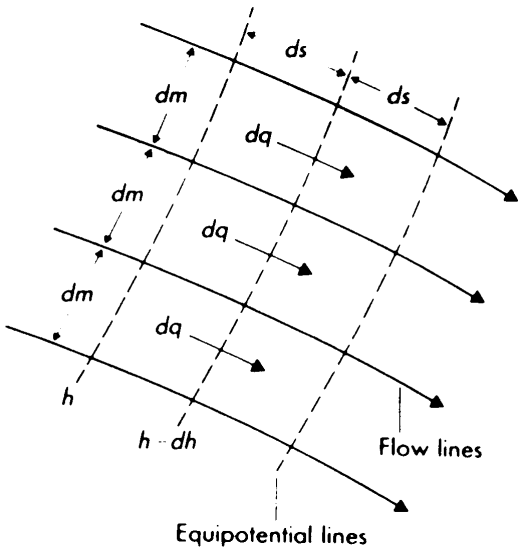
流網的適用情形：

(1) steady state

(2) 2-Dimensional

(3) isotropic 等向含水層

概念：兩組正交的線，一組為流線（streamline or flow line），一組為等位線（equipotential line），如右圖。



流線⇒指示水流的方向，在任何一點水流的速度方向均與流線相切。（即與流線垂直方向的分量為零）

等位線⇒與流線垂直，代表水力坡降的線。

由流網的圖可得 hydraulic gradient $i = \dfrac{dh}{dS}$

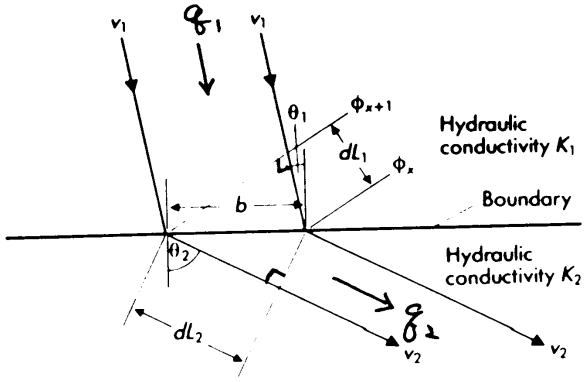
$$Q = iA \qquad \therefore q = K \cdot \frac{dh}{dS} \cdot dm$$

若流網為正方形流網（square net），即 $dm \approx dS$，則通過 m 個 streamtube 流管的總流量

$$Q = mq = K \cdot m \cdot dm \cdot \frac{dh}{dS} = Km\frac{H}{n}$$

其中 H 為總水頭損失，n 為等位線距的個數。

H 可為上游邊界水頭和下游邊界水頭的差，n 為總等位線距的個數。



若兩個 K 值不同的水層存在，則流線在水層邊界處會發生類似光學折射的偏折情形如右圖。等位線同樣也會發生偏折如右圖的 Φ_x 和 Φ_{x+1}，由於一個流管（streamtube）之內的流量 q 為定值，$\therefore q_1 = q_2$

$$\therefore [V_1 \cdot \cos\theta_1] \cdot b = [V_2 \cdot \cos\theta_2] \cdot b \qquad (1)$$

由達西定律知 $V_1 = K_1 \cdot \dfrac{\Phi_{x+1} - \Phi_x}{dL_1} = K_1 \dfrac{\Phi_{x+1} - \Phi_x}{b \sin\theta_1}$

$$V_2 = K_2 \cdot \frac{\Phi_{x+1} - \Phi_x}{dL_2} = K_2 \frac{\Phi_{x+1} - \Phi_x}{b \sin\theta_2}$$

將 V_1 和 V_2 代入 (1) 中 $\Rightarrow K_1 \dfrac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1} = K_2 \dfrac{\cos\theta_2}{\sin\theta_2}$

$$\Leftrightarrow \frac{K_1}{K_2} = \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}$$

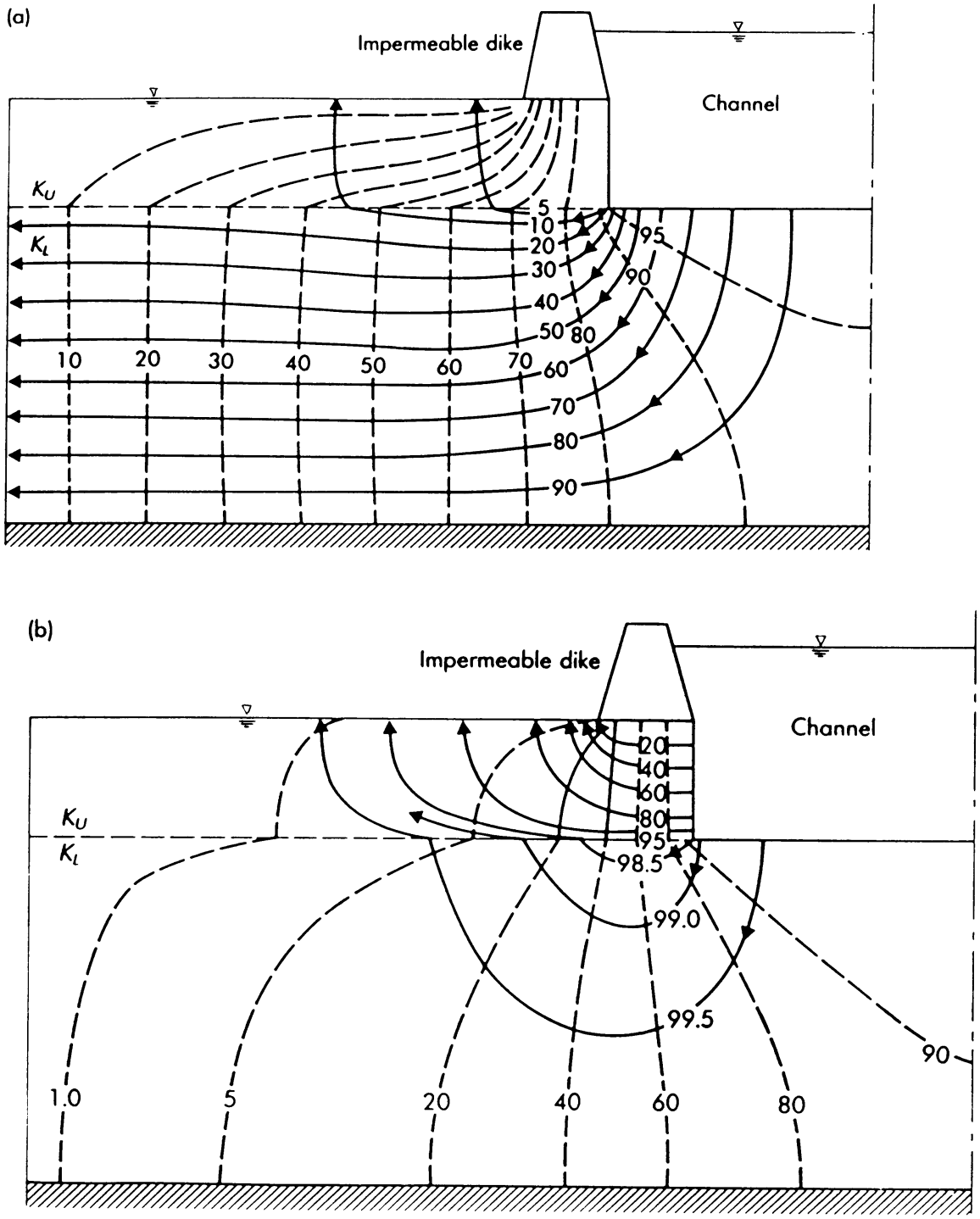
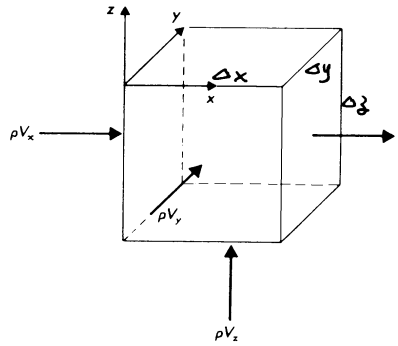


FIGURE 8.12

Flow nets for seepage from one side of a channel through two different anisotropic two-layer systems. (a) $K_u/K_L = 1/50$. (b) $K_u/K_L = 50$. The anisotropy ratio for all layers is $K_x/K_z = 10$. (After Todd and Bear, 1961.)

§8.4 地下水流方程式



地下水流的連續方程式為

$$\text{mass change in storage in time} = (\text{mass in - mass out})_{\text{at the boundary}}$$

$$\frac{\partial(\rho n)}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta z = \left[\rho V_x - \left(\rho V_x + \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x}\cdot\Delta x\right)\right]\Delta y\Delta z$$
$$+\left[\rho V_y - \left(\rho V_y + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y}\cdot\Delta y\right)\right]\Delta x\Delta z$$
$$+\left[\rho V_z - \left(\rho V_z + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z}\cdot\Delta z\right)\right]\Delta x\Delta y$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial(\rho n)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z)$$

上式中 n 為土壤的孔隙率，V_x、V_y、V_z 為三個方向分量的孔隙介質巨觀平均流速。三個速度分量以達西定律代入

$$V_x = -K_x\frac{\partial h}{\partial x} \qquad V_y = -K_y\frac{\partial h}{\partial y} \qquad V_z = -K_z\frac{\partial h}{\partial z}$$

另外，控制體積內的質量變化率為 $\frac{\partial(\rho n)}{\partial t} = n\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial n}{\partial t}$，$n\frac{\partial\rho}{\partial t}$ 為水的可壓縮性，$\rho\frac{\partial n}{\partial t}$ 為孔隙介質受壓造成孔隙率的改變，亦即孔隙介質的可壓縮性。以上壓縮性造成的原因是因為壓力水頭的變化，對一個單位體積，單位水頭變化的出水量為比貯率（specific storage）

$$S_S = \rho_w g(\alpha + n\beta) \qquad \text{並且}\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho n) = S_S\frac{\partial h}{\partial t}\cdot\rho$$

Specific Storage S_s= $\rho_w g\cdot(\alpha + n\beta)$ is the volume of water produced from a unit volume of soil for a unit head decline [1/L]. Where α is the compressibility of the aquifer skeleton (LT^2/M)；β is the compressibility of water (LT^2/M)

比貯率S_S和前面提到的貯蓄係數S的關係為，$S = S_S \cdot b$，b為拘限含水層的厚度。

將以上各項代入連續方程式得到孔隙介質水流的控制方程式

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \frac{\partial h}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z \frac{\partial h}{\partial z}\right) = S_S \frac{\partial h}{\partial t}$$

若(1) $K_x = K_y = K_z = K$，即孔隙介質為等向、均質，

(2)穩定狀態（steady state）$\frac{\partial}{\partial t} = 0$

則以上控制方程式簡化為

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

即 Laplace 方程式，其中$h = h(x, y, z)$為空間中任意點的總水頭。而非穩定、等向均質含水層的控制方程式為

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{S_S}{K}\frac{\partial h}{\partial t}$$

對一個水平的拘限含水層而言，$S = S_S \cdot b$，$T = K \cdot b$，則控制方程式可寫為

$$\nabla^2 h = \frac{S}{T}\frac{\partial h}{\partial t}$$

§杜布假設

對於一個自由含水層，杜布發展一套理論可簡化自由含水層水流方程式的解。杜布假設的內容為

1.地下水水面線和水力坡降曲線相同；

2.流線可視為水平、等位線可視為垂直。

杜布假設要成立必須有兩個條件

1.地下水水面線僅略為傾斜（接近水平）；

2.自由含水層厚度變化不太大，並且h不趨近於 0。

在一個一維的問題中（如右圖）在自由含水層中杜布假設可導致特定的地下水流方程式稱為”杜布方程式”。

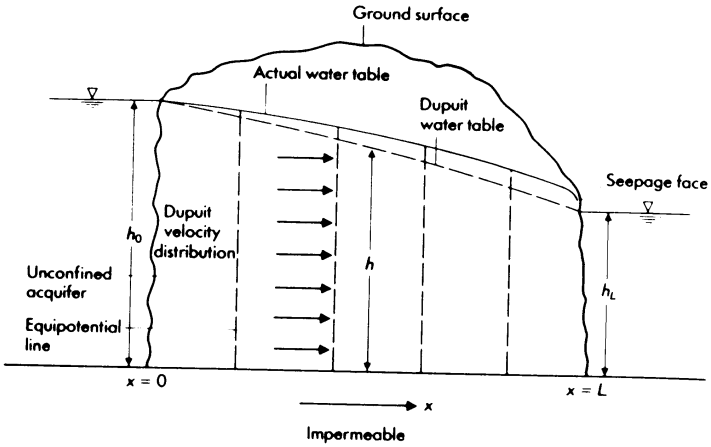


FIGURE 8.16
Steady flow in an unconfined aquifer between two water bodies with vertical boundaries.

由達西定律寫出上圖單位厚度的流量 $q_x = -K(h \cdot 1)\dfrac{\partial h}{\partial x}$ 。

由連續方程式在$x=0$到$x=L$之前，若為穩態（steady state）q_x則為定值，即$\dfrac{d}{dx}(q_x)=0$

$$\frac{d}{dx}(q_x) = -K\frac{d}{dx}\left(h\frac{dh}{dx}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{dh^2}{dx}\cdot\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{d^2h^2}{dx^2} = 0$$

$h^2 = ax + b$表示在x方向水深成一拋物線變化。

在$x=0$　　$h_0^2 = b$　　$\therefore b = h_0^2$

$x = L$　　$h_L^2 = aL + h_0^2$　　$\therefore a = -\dfrac{h_0^2 - h_L^2}{L}$

$$\therefore h^2(x) = -\frac{h_0^2 - h_L^2}{L}x + h_0^2$$

代回達西定律 $q=-Kh\dfrac{\partial h}{\partial x}=-\dfrac{K}{2}\dfrac{\partial h^2}{\partial x}=K\cdot\dfrac{h_0^2-h_L^2}{2L}$

由是由 h_0、h_L、K 和 L 即可計算流量，此即杜布方程式，另外

$$\therefore h^2=h_0^2-\frac{x}{L}\left(h_0^2-h_L^2\right)$$ 稱為杜布拋物線（Dupuit Parabola）

§含地下水補注的杜布方程式

含地下水補注量的連續方程式為

$$\frac{dq}{dx}=w$$

$$\Leftrightarrow -\frac{K}{2}\frac{d^2h^2}{dx^2}=w$$

$$\Leftrightarrow h^2=-\frac{w}{K}x^2+ax+b$$

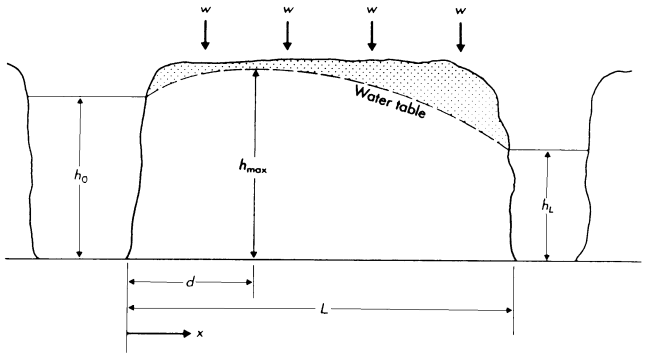


FIGURE 8.17
Dupuit parabola with recharge.

由 $x=0$，$h=h_0$ 和 $x=L$，$h=h_L$ 兩個邊界條件解 a 和 b 得到

$$b=h_0^2\text{，}h_L^2=-\frac{w}{K}L^2+aL+h_0^2\Rightarrow a=\frac{h_L^2-h_0^2}{L}+\frac{wL}{K}$$

代入以上方程式得到杜布拋物線方程式為

$$h^2=h_0^2+\frac{h_L^2-h_0^2}{L}x+\frac{wx}{K}(L-x)$$

上式代入達西定律，$\dfrac{1}{2}\dfrac{dh^2}{dx}=-\dfrac{q}{K}$ 得到：

$$-\frac{2q}{K}=\frac{h_L^2-h_0^2}{L}+\frac{w}{K}(L-2x)$$

$$\Leftrightarrow q=\frac{K}{2L}\left(h_0^2-h_L^2\right)+w\left(x-\frac{L}{2}\right)$$ （杜布方程式）

上圖中 $h_{\max}$ 點為自由含水層中總水頭最大處（∵地下水水面和總水頭線相同），因此在 $h_{\max}$ 左側的水向左流，在 $h_{\max}$ 右側的水向右邊流。

$$h=\left[h_0^2+\frac{h_L^2-h_0^2}{L}x+\frac{wx}{K}(L-x)\right]^{1/2}$$

$$\frac{dh}{dx}=\frac{1}{2}\left[h_0^2+\frac{h_L^2-h_0^2}{L}x+\frac{wx}{K}(L-x)\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[\frac{h_L^2-h_0^2}{L}x+\frac{w}{K}(L-2x)\right]$$

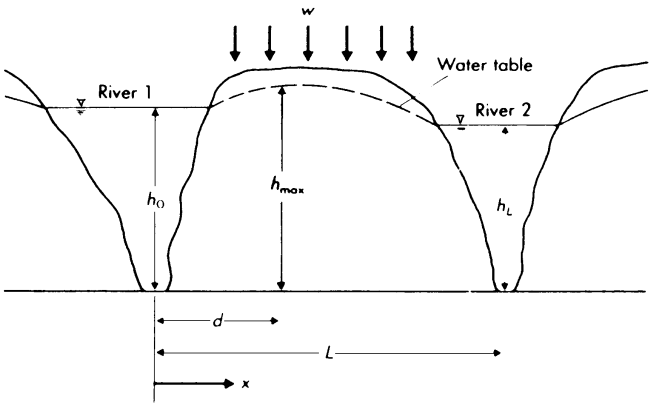
$$\left.\frac{dh}{dx}\right|_{x=0}=\frac{1}{2}\frac{1}{h_0}\cdot\left[\frac{h_L^2-h_0^2}{L}+\frac{w}{K}L\right]$$

由於 $h_0>h_L$ $\therefore$ 若 $w<\frac{h_0^2-h_L^2}{L^2}K$ 則 $\left.\frac{dh}{dx}\right|_{x=0}<0$

則沒有 $h_{\max}$ 的存在，若 $w=\frac{h_0^2-h_L^2}{L^2}K$ 則 $h_{\max}=h_0$，

最高的水位即位於 $x=0$ 處，並且 $dh/dx=0$，若 $w>\frac{h_0^2-h_L^2}{L^2}K$ 則 $\left.\frac{dh}{dx}\right|_{x=0}>0$，會有 $h_{\max}$ 的存在。

例題：如右圖



$L=1000\text{m}$，$K=0.5\,\text{m/day}$，

$h_0=20\text{m}$，$h_L=18\text{m}$，

$w=5\,\text{cm/yr}=1.369\times10^{-4}\,\text{m/day}$

求(1) $d=?$ (2) $h_{\max}=?$

(3) $q_0=?$ (4) $q_L=?$

Sol：(1) at $x=d$，$q=0$，$h=h_{\max}$

由 $q=\frac{K}{2L}\left(h_0^2-h_L^2\right)+w\left(x-\frac{L}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow 0=\frac{K}{2L}\left(h_0^2-h_L^2\right)+w\left(d-\frac{L}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow d=\frac{L}{2}-\frac{K}{2wL}\left(h_0^2-h_L^2\right)$$

$$=\frac{1000}{2}-\frac{0.5\left(20^2-18^2\right)}{2\times1.369\times10^{-4}\times1000}$$

$$=361.2\text{m}$$

(2)由 $h^2=h_0^2+\frac{h_L^2-h_0^2}{L}x+\frac{wx}{K}(L-x)$

$$h_{\max}^2=h_0^2+\frac{h_L^2-h_0^2}{L}\cdot d+\frac{wd}{K}(L-d)$$

$$=20^2+\frac{18^2-20^2}{1000}\cdot361.2+\frac{1.369\times10^{-4}\cdot361.2}{0.5}(1000-361.2)$$

$$=435.7$$

$$\Rightarrow h_{\max}=20.87\text{m}$$

(3)由 $q=\frac{K}{2L}\left(h_0^2-h_L^2\right)+w\left(x-\frac{L}{2}\right)$ 代入 $x=0$ 求 q_0

$$q_0=\frac{0.5}{2000}\left(20^2-18^2\right)+1.369\times10^{-4}\left(0-\frac{1000}{2}\right)$$

$$=-4.945\times10^{-2}\ \text{m}^2/\text{day}$$

負號代表向左流入第 1 個河川。

(4) 將 $x=L$ 代入 $q=\frac{K}{2L}\left(h_0^2-h_L^2\right)+w\left(x-\frac{L}{2}\right)$ 求 q_L

$$q_L=\frac{0.5}{2000}\left(20^2-18^2\right)+1.369\times10^{-4}\left(1000-\frac{1000}{2}\right)$$

$=8.745\times10^{-2}\ \text{m}^2/\text{day}$ 流入第 2 河川

§8.5 穩定狀態的水井水力學 Steady-State Well Hydraulics

8.4 節中推導的地下水控制方程式可用於自由含水層與拘限含水層。對於簡單的狀況，如穩態、均質、等向、簡單邊界條件的地下水層，可以求得解析解。例如穩態的 1-D 自由含水層流況可利用杜布假設求得解析解。

§拘限含水層穩態輻合流向一水井

右圖顯示一個「完全貫穿」井，拘限含水層為水平且無窮大，在未抽水之前的水面線到抽水後水面線的距離稱為「洩降」(drawdown)。

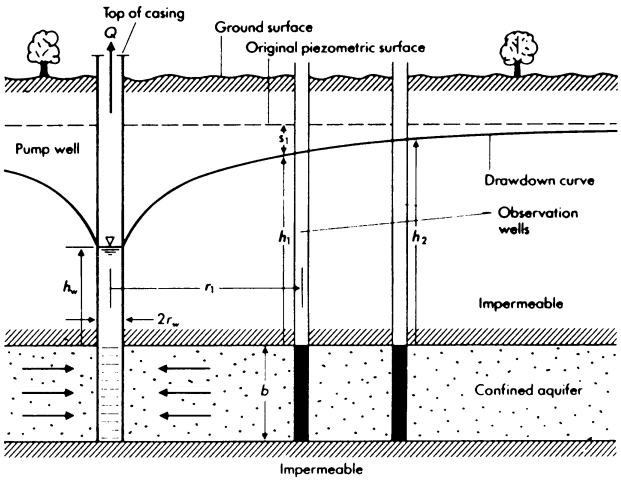


FIGURE 8.18
Radial flow to a well penetrating an extensive confined aquifer.

達西定律 $Q = -KiA$

$$\because i = -\frac{dh}{dr}$$

$$Q = K \cdot \frac{dh}{dr} \cdot (2\pi r \cdot b) \qquad + K \cdot \frac{dh}{dr} = V_r$$

最近的邊界條件之一是在井的位置，當 $r = r_w$，$h = h_w$

$$\Leftrightarrow \frac{dr}{r} = \frac{K}{Q} 2\pi b dh$$

$$\Leftrightarrow \ln r\Big|_{r_w}^{r} = \frac{K}{Q} 2\pi b h\Big|_{h_w}^{h}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(r/r_w \right) = \frac{K}{Q} 2\pi b (h - h_w)$$

$$\Leftrightarrow Q = 2\pi K b \frac{h - h_w}{\ln\left(r/r_w \right)}$$

若在抽水實驗中估計 $T = Kb$

則 $T=\dfrac{Q}{2\pi(h_2-h_1)}\ln\left(r_2/r_1\right)$

例題：一抽水井+2 個觀測井+拘限含水層

$Q=0.2\,\mathrm{m^3/min}$　　$r_1=100\mathrm{m}$　　$r_2=1000\mathrm{m}$

$b=20\mathrm{m}$　　$S_1'=8\mathrm{m}$　　$S_2'=2\mathrm{m}$

估計 K 和 T

Sol：由 $T=\dfrac{Q}{2\pi(h_2-h_1)}\ln\left(r_2/r_1\right)$

$$=\frac{0.2}{2\pi[(h_0-S_2')-(h_0-S_1')]}\ln\left(1000/100\right)$$

$$=\frac{0.2}{2\pi[8-2]}\ln(10)$$

$$=0.0122\,\mathrm{m^2/min}=2.04\,\mathrm{cm^2/s}$$

$$K=T/b=\left[\left(2.04\,\mathrm{cm^2/s}\right)/20\mathrm{m}\right]\times\frac{1\mathrm{m}}{100\mathrm{cm}}$$

$$=1.02\times10^{-3}\,\mathrm{cm/s}$$

§自由含水層穩態輻合流向一水井

在自由含水層中輻合流向一水井必須使用杜布假設。若使用杜布假設，則：

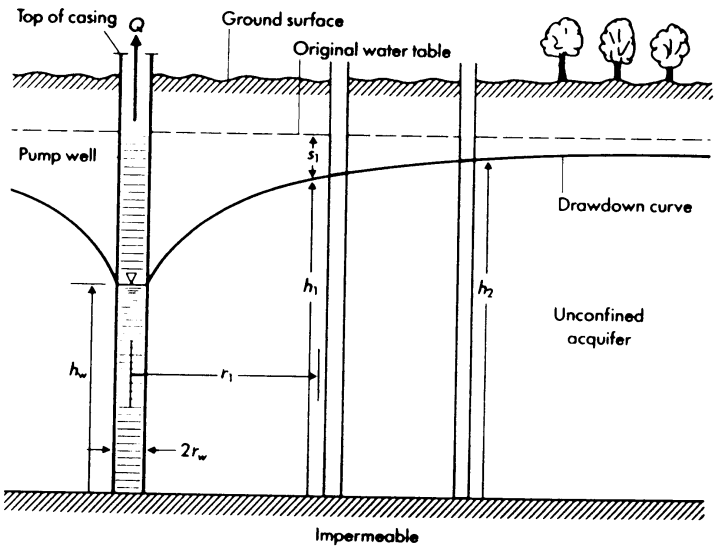


FIGURE 8.19

Radial flow to a well penetrating an unconfined aquifer.

$$Q = 2\pi r K h \frac{dh}{dr} \qquad \left(\because i = -\frac{\partial h}{\partial r}\right)$$

$$\Leftrightarrow Q = \pi K \frac{h_2^2 - h_1^2}{\ln\left(r_2 / r_1\right)}$$

$$\text{or} \quad K = \frac{Q}{\pi\left(h_2^2 - h_1^2\right)} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

例題：一完全貫穿抽水井+自由含水層+2 個觀測井

$$Q = 75\text{gpm} \qquad r_1 = 75\text{ft} \qquad r_2 = 2000\text{ft}$$

$$h_1 = 20\text{ft} \qquad h_2 = 34\text{ft}$$

求 K 值。

Sol：由 $K = \dfrac{Q}{\pi\left(h_2^2 - h_1^2\right)} \ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)$

$$= \frac{(75\text{gpm}) \cdot \left(0.134\text{ft}^3/\text{gal}\right)\left(1\text{min}/60\text{sec}\right)}{\pi\left(34^2\text{ft}^2 - 20^2\text{ft}^2\right)} \ln\left(\frac{2000\text{ft}}{75\text{ft}}\right)$$

$$= 2.32 \times 10^{-4}\ \text{ft}/\text{s}$$

§多水井系統

對於多水井抽水無論是拘限含水層或自由含水層，均可使用疊加法（method of superposition），將各井單獨存在造成的洩降加以疊加即成為多井系統的洩降。

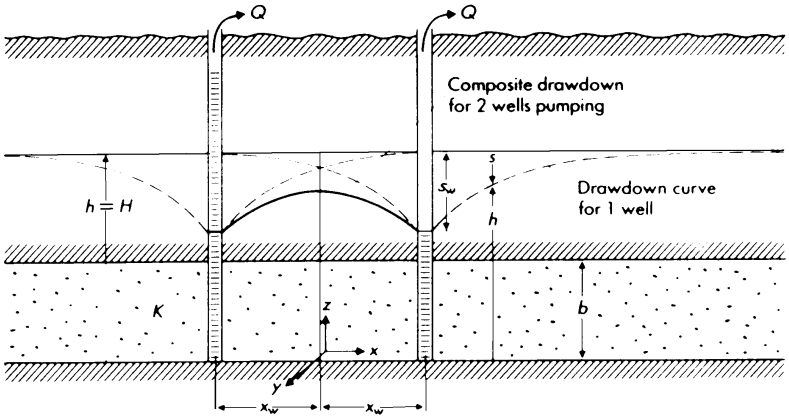


FIGURE 8.21

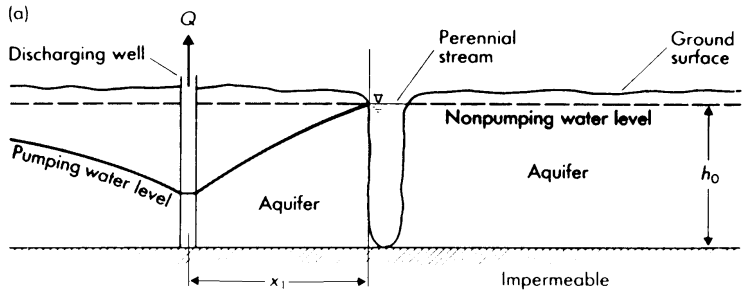
Individual and composite drawdown curves for two wells in a line.

圖中任意點的洩降 s 可表為 $s = s_1' + s_2'$

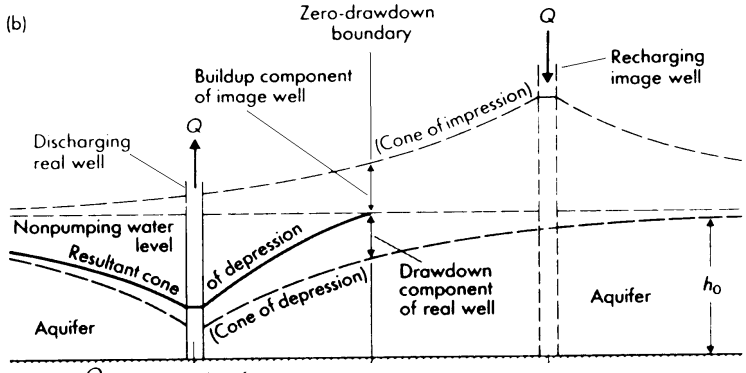
其中 s_1' 和 s_2' 是井 1 單獨抽水的洩降和井 2 單獨抽水的洩降。

由於疊加法可以適用，因此可延伸為鏡像井的概念。

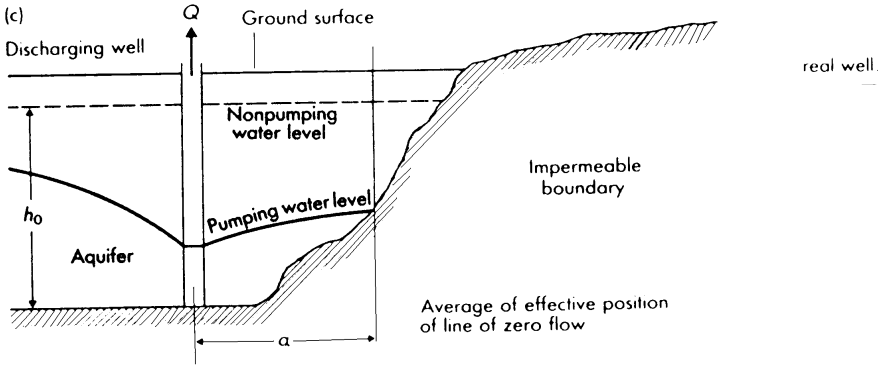
例如：一個抽水井加一個定水位河川。由於河川的影響並非局部而是深遠的，但影響洩降的方式並不清楚。



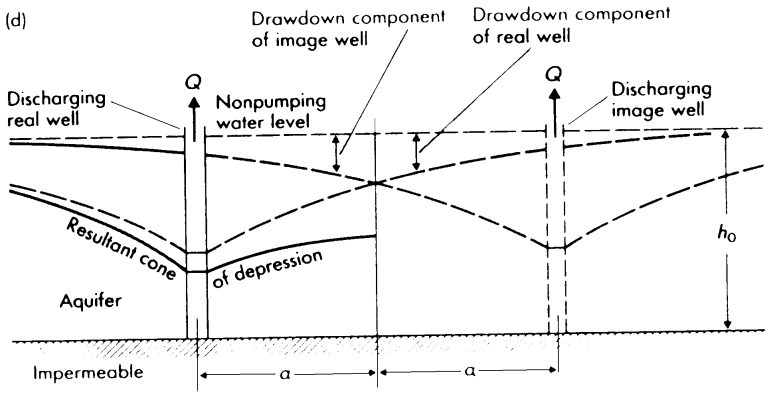
可在零洩降點的另一邊設一鏡像補注井，補注量與抽水井的抽水量相同，兩者在零洩降處影響要平衡，所以抽水井和零洩降點距＝鏡像井和零洩降點的距離。



其餘點的洩降即為抽水井和鏡像井洩降量的和。



另一種可利用鏡像井是在不透水邊界。在邊界處 $q = 0$ 相當於將不透水邊界撤除，在不透水邊界另一邊和抽水井等距處 $(a = a)$ 另設一抽水井，抽水量同樣為 Q，則兩井在不



Aquifer thickness h_0 should be very large compared with resultant drawdown near real well.

透水邊界處達成平衡，不向左也不向右流動。

右下圖 8.23 為一拘限含水層抽水與定水頭邊界（位於 y 軸位置），以注水鏡像井解的流線和等位線，已知 Q 和抽水井的位置 $(-x_w,0)$，和一個位於 (x_0,y_0) 的觀測井的實際洩降 s_0，含水層的導水係數未知。假設在 $(x_w,0)$ 設一注水井，拘限含水層原始水頭與河川水位都等於 h_∞，為未知；由拘限含水層水井公式，

$$\frac{Q}{2\pi T}=\frac{h-h_w}{\ln(r/r_w)}$$

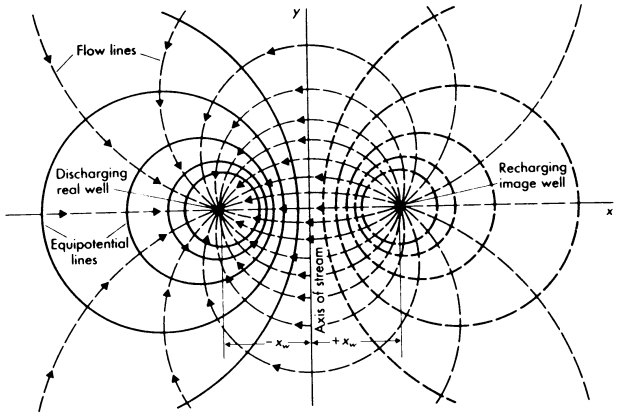


FIGURE 8.23
Flow net for a discharging real well and a recharging image well. (After Ferris et al., 1962.)

抽水井在無河川含水層中單獨抽水造成觀測井位置點 (x_0,y_0) 的洩降為 s_1'（≥ 0，未知），(x_0,y_0) 與抽水井距離為 $r_1=\sqrt{(x_0+x_w)^2+y_0^2}$，

$$\frac{Q\ln(r_1/r_w)}{2\pi T}=(h_\infty-s_1')-(h_\infty-s_w')=s_w'-s_1'$$

注水井在無河川含水層中單獨注水造成 (x_0,y_0) 的揚升為 s_2'（≥ 0）：

$$-\frac{Q\ln(r_2/r_w)}{2\pi T}=(h_\infty+s_2')-(h_\infty+s_w')=s_2'-s_w'$$

其中，$r_2=\sqrt{(x_0-x_w)^2+y_0^2}$。將以上抽水和注水公式相加，得到：

$$\frac{Q\ln(r_1/r_2)}{2\pi T}=s_2'-s_1'=s_0$$

上式中 Q、r_1、r_2 和 s_0 為已知，可以求 T。其次，對於任意點 (x,y)，

$$s(x,y)=s_2''-s_1''=\frac{Q}{2\pi T}\ln\sqrt{\frac{(x+x_w)^2+y^2}{(x-x_w)^2+y^2}}$$

以上方程式表示，無法推估單獨抽水與注水的洩降 s_1'' 與揚升 s_2''，但是只要給 (x,y) 座標，即可估計合成的洩降量 $s(x,y)$。