

## 層變流通過變化底床所引致內重力波研究

孔慶華 許文翰 林崑源

國立台灣大學造船研究所

關鍵詞：內重力波，臨界福祿數

### 摘 要

本文主要目的，在處理層變流通過變化地形所引致的內重力波問題，同時以解析法去求解其流場變化，包括了速度勢及波高等。首先我們須將層變流以二層流模擬之，使問題得以簡化。由深度比、密度比、流速比及底床彎曲對應之波數所得之福祿數 (Froude number) 為重要影響因素，在某特定值時，會有共振 (resonance) 現象發生，以致以線性理論而言，其振幅會有繼續增大之現象，臨界福祿數可以以其物理特性解說之。比較兩種不同之解析法求得內重力波是本文考慮的重點，第一種方式是先假定速度勢與流線函數之形式為已知，求其線性解之未知係數，第二種方式則是以某種特定微小參數，用微擾法 (perturbation method)，求在一次冪級數及求至二次冪級數所得之結果，加以比較。福祿數接近臨界福祿數時，非線性解和線性解有較明顯的差異，同時結果亦顯示線性解因福祿數和形狀因子改變之適用範圍。

## INTERNAL WAVES INDUCED BY STRATIFIED FLOW OVER BULGING BED

C.H. Kong, Tony W.H. Sheu, K.Y. Lin

Institute of Naval Architecture, National Taiwan University

*Keywords: internal waves, critical Froude numbers.*

### ABSTRACT

Internal waves induced by stratified flow over varied topography are treated, and analytical solutions are given. It has been simplified by appropriate two-layer flow to describe the stratified flow. It is shown that for each category there is an infinite number of Froude numbers which depend on the ratios of the depth, densities, stream speeds and the wave number of the wavy bed, at which resonance occurs, and the amplitude of one of the wave components become infinite, according to the linear theory. These critical Froude numbers are interpreted physically.

The purpose of this paper is to compare two different analytical methods. With the known forms of the velocity potential and the stream functions, we can find the unknown coefficients of the potential function. And the results obtained by the perturbation method with same parameter to the first order are compared with these to the second order are shown different apparently, when Froude number is close to critical Froude number. For some special region of Froude numbers and form factor, linear solutions are good enough.

## 前 言

在自然界中，海洋受溫度變化影響，使得密度產生變化，因而層變流之研究以及內重力波之產生乃是一重要課題。若底床有變化則應會引致內重力波，而一般內重力波波數很小時之振幅遠較自由液面來得大，因此，在層變流研究時，常以表面無擾動情況假定之。在海洋及水利工程相關文獻方面，探討底床所引致重力波之研究很多，其中 Baines[1]有完整二層流內重力波之實驗觀察，而 Saffman & Yuen[8]則是先固定內重力波之波高，探討在上下層無窮水深之密度比、流速及波高的關係，Kong & Wan[4]密度層變流域以二層流域模擬之，而求得對應比例深度之研究，Yih[10]曾處理波形邊牆之內重力波問題，且 Yih[11]也討論底床隆起在層變流中實驗與理論之流線變化比較，以上論文皆對本文提供有價值之參考。

本文之主要宗旨乃是提供兩種不同之解析方式去求得在波形底床上內重力波之解析解，第一種是利用 Lamb[1]所提之座標系統及假設已知速度勢之形式，求其線性解之未知係數，第二種方式則是以某種特定微小參數，用微擾法 (perturbation method)，求在一次冪級數及求至二次冪級數所得之解析解，其後文是將這些在波形底床所引致之內重力波，利用積分轉換 (integral transformation) 之關係變換成凹凸地形所引致之內重力波，經由這兩種解析方式來比較其適用範圍，並且探討其引致線性波與非線性波之差異，以建立以解析法分析內重力波之可行性。

從本文的研究中，我們發現判定臨界流之福祿數與密度比、速度比和介面水深有關係，利用這個關係式，我們便可以預知那一種流速會產生那一種流場，再用疊加原理模擬出不同之地形，繪出不同之流況所引致之內重力波波形及波高。本文另一重要目的，乃以本文方法求得層變流及二層流所引致之流況變化及波高，使其結果可供水下潛體及載具運動研究者之解析法求解之有效參考。同時本文水下內重力

波之研究結果。亦可供船體航行運動之穩定性研究者具某種特定參考價值。

## 內重力波之解析解

### 1. 二層流通過波形底床之內重力波解

我們處理二層流問題時，忽略其黏滯性及介面張力，且假定上下層都為均質流體及非旋性流 (irrotational flow)，如圖 1 所示，則流速的分量，下層流及上層流之速度勢 (velocity potential) 可分別以  $\hat{\phi}_1$ ， $\hat{\phi}_2$  表示得

$$\hat{u}_1 = \frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial \hat{x}}, \quad \hat{v}_1 = \frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial \hat{y}}, \quad (1)$$

$$\hat{u}_2 = \frac{\partial \hat{\phi}_2}{\partial \hat{x}}, \quad \hat{v}_2 = \frac{\partial \hat{\phi}_2}{\partial \hat{y}}, \quad (2)$$

其中

$\hat{u}_1$ ， $\hat{u}_2$ ：平行底床方向  $\hat{x}$  下上二層之流速

$\hat{v}_1$ ， $\hat{v}_2$ ：垂直底床方向  $\hat{y}$  下上二層之流速

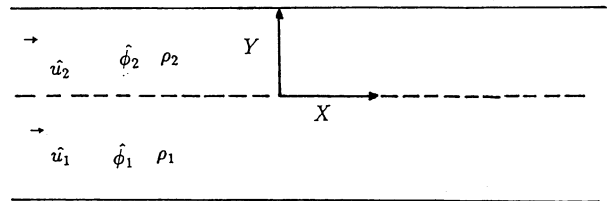


圖 1 座標示意圖

假設流體具不可壓縮性，則連續方程式為

$$\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial \hat{y}} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial \hat{y}} = 0, \quad (4)$$

(1)-(3) 和 (2)-(4) 式可以得拉氏方程式 (Laplace eq.)

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}_1}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_1}{\partial \hat{y}^2} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}_2}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_2}{\partial \hat{y}^2} = 0, \quad (6)$$

若令流場為穩流狀態時，除去高階 (high order) 影響後之二層流介面條件分別為

$$\hat{u}_1 \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{x}} = \hat{v}_1, \quad \text{在 } \hat{y} = 0 \text{ 時,} \quad (7)$$

$$\hat{u}_2 \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{x}} = \hat{v}_2, \quad \text{在 } \hat{y} = 0 \text{ 時,} \quad (8)$$

其中  $\hat{\eta}$  為二層流界面之變位，同時考慮其暫定波狀態時，則其介面的動力條件之伯努利方程式 (Bernoulli eq.)，則分別為

$$\frac{P}{\rho_1} + \hat{u}_1^2 + \hat{v}_1^2 + 2g\hat{\eta} = C_1, \quad (9)$$

$$\frac{P}{\rho_2} + \hat{u}_2^2 + \hat{v}_2^2 + 2g\hat{\eta} = C_2, \quad (10)$$

其中  $C_1, C_2$  為常數，而  $\rho_1, \rho_2$  分別代表下上二層流體之密度，因介面之壓力  $P$  相等，所以可將(9)-(10)式合併，即得

$$\begin{aligned} & \rho_1(\hat{u}_1^2 + \hat{v}_1^2) - \rho_2(\hat{u}_2^2 + \hat{v}_2^2) \\ & + 2g(\rho_1 - \rho_2)\hat{\eta} \\ & = (\rho_1 C_1 - \rho_2 C_2), \end{aligned} \quad (11)$$

將(11)式與(7)式和(8)式合併，即可得介面動力條件為

$$\begin{aligned} & \hat{u}_1 \frac{\partial}{\partial \hat{x}} [\rho_1(\hat{u}_1^2 + \hat{v}_1^2) - \rho_2(\hat{u}_2^2 + \hat{v}_2^2)] \\ & + 2g(\rho_1 - \rho_2)\hat{v}_1 = 0, \quad \text{在 } \hat{y} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \hat{u}_2 \frac{\partial}{\partial \hat{x}} [\rho_1(\hat{u}_1^2 + \hat{v}_1^2) - \rho_2(\hat{u}_2^2 + \hat{v}_2^2)] \\ & + 2g(\rho_1 - \rho_2)\hat{v}_2 = 0, \quad \text{在 } \hat{y} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

如果將底床邊界看成是一條流線 (stream line)，則可得

$$\hat{\psi}_1 = \hat{c}_1, \quad \text{在 } \hat{y} = -\hat{h} \quad (14)$$

由於內重力波低頻振幅遠比自由液面低頻振幅來得大，因此我們即以自由表面在暫定內重力波時以流線求之，即得

$$\hat{\psi}_2 = \hat{c}_2, \quad \text{在 } \hat{y} = \hat{d} \quad (15)$$

假定方程式群在無因次化處理後，即如

$$[x, y, h, d] = \left[ \frac{\hat{x}}{L}, \frac{\hat{y}}{L}, \frac{\hat{h}}{L}, \frac{\hat{d}}{L} \right],$$

$$[F^2, \phi_1, \phi_2, r_\rho, r_u] =$$

$$\left[ \frac{U_1^2}{gL(1-r_\rho)}, \frac{\hat{\phi}_1}{U_1 L}, \frac{\hat{\phi}_2}{U_1 L}, \frac{\rho_2}{\rho_1}, \frac{U_2}{U_1} \right],$$

其中  $L = \hat{h} + \hat{d}$  是二層流之總水深， $\hat{h}$  是下層流之水深， $\hat{d}$  是上層流之水深， $U_1$  和  $U_2$  是其相對應之流速， $\rho_1$  和  $\rho_2$  是其相對應之密度，我們又定義  $F$  為介面之福祿數， $r_u$  是  $U_1$  和  $U_2$  之速度比， $r_\rho$  是  $\rho_1$  和  $\rho_2$  之密度比，而符號上面具上標者即代表在實際流場中之物理量。因之方程式群可以下式表示之

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} = 0, \quad (17)$$

$$\psi_1 = c_1, \quad \text{在 } y = -h \quad (18)$$

$$\psi_2 = c_2, \quad \text{在 } y = d \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left[ \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right]^2 - r_\rho \left[ \left[ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right]^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \left[ \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right]^2 \right] \right] + 2F^{-2} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = 0, \\ & \text{在 } y = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left[ \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right]^2 - r_\rho \left[ \left[ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right]^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \left[ \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right]^2 \right] \right] + 2F^{-2} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = 0, \\ & \text{在 } y = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

如圖2a和圖2b所示，如果我們以  $(\alpha, \beta)$  座標系統取代  $(x, y)$  座標系統，並以下式所示

$$x = \alpha,$$

$$y = \beta$$

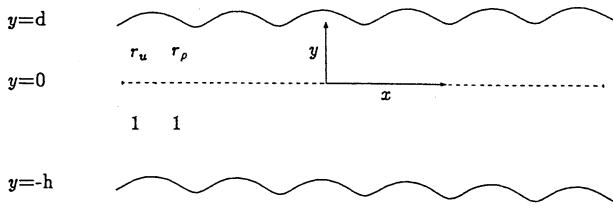


圖 2a 具有彎曲底床之示意圖

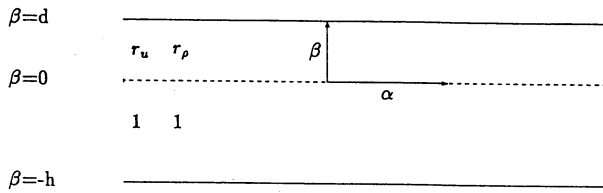


圖 2b 轉換後之底床之示意圖

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^{i=t} \frac{a_i}{s_m} \exp^{(s_m - s_i)k} \cos k(\alpha + \alpha_i), \quad (22) \\
 x = \alpha, \\
 & + \sum_{i=1}^{i=t} \frac{a_i}{s_m} \exp^{(s_m - s_i - \beta)k} \sin k(\alpha + \alpha_i), \\
 & = \alpha + \sum_{m=1}^{m=t} a_i X_i, \\
 y = \beta, \\
 & - \sum_{i=1}^{i=t} \frac{a_i}{s_m} \exp^{(s_m - s_i - \beta)k} \cos k(\alpha + \alpha_i), \\
 & = \beta + \sum_{i=1}^{i=t} a_i Y_i, \quad (23)
 \end{aligned}$$

(22)式和(23)式代表二種近似座標系統，其中 $(\alpha, \beta)$ 是轉換後之座標系統， $a_i$ 是底床擾動之第 $i$ 項的振幅擾動量， $s_i$ 是第 $i$ 項的形狀變化因子， $s_m$ 是 $s_i$ 中之最小形狀因子， $\alpha_i$ 是第 $i$ 項在負 $\alpha$ 方向的位移量， $k$ 是波形底床之波數， $t$ 是波形底床疊加的總數。其下上層流之速度勢函數和流線函數，假定為

$$\begin{aligned}
 \phi_1 = x + \sum_{i=1}^{i=t} [E_{1i} \cosh(ky) \\
 + F_{1i} \sinh(ky)] \sin k(x + \alpha_i)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_1 = y + \sum_{i=1}^{i=t} [E_{1i} \sinh(ky) \\
 + F_{1i} \cosh(ky)] \cos k(x + \alpha_i)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_2 = r_u x + \sum_{i=1}^{i=t} [E_{2i} \cosh(ky) \\
 + F_{2i} \sinh(ky)] \sin k(x + \alpha_i)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_2 = r_u y + \sum_{i=1}^{i=t} [E_{2i} \cosh(ky) \\
 + F_{2i} \sinh(ky)] \cos k(x + \alpha_i)
 \end{aligned}$$

運用(22)式之座標系統，將這些代入(18)-(21)式，並且忽略高次項，得

$$F_{2i} = r_u F_{1i} \quad (24)$$

$$E_{1i} - r_\rho r_u E_{2i} = F^{-2} k^{-1} F_{1i} \quad (25)$$

$$E_{1i} \sinh(kh) - F_{1i} \cosh(kh) = W_i a_i \quad (26)$$

$$E_{2i} \sinh(kd) + F_{2i} \cosh(kd) = -r_u W_i a_i \quad (27)$$

由(24)-(27)式中，我們可以解聯立方程式，得

$$\begin{aligned}
 E_{1i} = & \frac{-F^{-2} \cosh(kd) - k r_\rho r_u^2 \left[ \frac{1}{\sinh(kd)} - \frac{\coth(kd)}{\cosh(kh)} \right]}{-F^{-2} \tanh(kh) + k \left[ 1 + r_\rho r_u^2 \frac{\tanh(kh)}{\tanh(kd)} \right]} W_i a_i \\
 E_{2i} = & \frac{F^{-2} \frac{\tanh(kh)}{\sinh(kd)} - k \left[ \frac{1}{\sinh(kd)} - \frac{\coth(kd)}{\cosh(kh)} \right]}{-F^{-2} \tanh(kh) + k \left[ 1 + r_\rho r_u^2 \frac{\tanh(kh)}{\tanh(kd)} \right]} r_u W_i a_i
 \end{aligned}$$

$$\text{其中 } W_i = \frac{\exp^{k(s_m - s_i)}}{s_m}$$

利用伯努利方程式(Bernoulli equation)，我們即得

$$\frac{1}{2}(q_1^2 - r_\rho q_2^2) + F^{-2} \eta = \text{const} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
 \text{其中 } q_1^2 = |\nabla \phi_1|^2 \\
 q_2^2 = |\nabla \phi_2|^2
 \end{aligned}$$

由於上有相同的壓力，經由忽略高次項，所以我們可以將 (28) 式簡化，得一簡式為

$$\eta_{\text{Lamb}} = -F^2 [E_{1i} - r_\rho r_u E_{2i}] \cos k(x + \alpha_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{i=t} \frac{k(1+r_\rho r_u^2 \frac{\sinh(kh)}{\sinh(kd)}) a_i W_i \cos k(x + \alpha_i)}{-F^{-2} \tanh(kh) + k \left[ 1 + r_\rho r_u^2 \frac{\tanh(kh)}{\tanh(kd)} \right]}$$

其中  $\eta_{\text{Lamb}}$  是得自 (22) 式之座標系統之介面變位，而下標表示座標系統取自 Lamb[1] 所提。如果我們採用 (23) 式之座標系統，則可以推得新的控制方程式群如下：

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \beta^2} = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \beta^2} = 0 \quad (30)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \beta} = 0, \quad \text{在 } y = -h \quad (31)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \beta} = 0, \quad \text{在 } y = d \quad (32)$$

$$\left[ \frac{\partial y}{\partial \beta} \frac{\partial \phi_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial \phi_1}{\partial \beta} \right] \left[ \frac{\partial y}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \right]$$

$$\left[ \frac{1}{J} \left[ \left[ \frac{\partial \phi_1}{\partial \alpha} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \phi_1}{\partial \beta} \right]^2 \right. \right.$$

$$\left. \left. - r_\rho \left[ \left[ \frac{\partial \phi_2}{\partial \alpha} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \phi_2}{\partial \beta} \right]^2 \right] \right] \right]$$

$$+ 2JF^{-2} \left[ \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial \phi_1}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial \phi_1}{\partial \alpha} \right]$$

$$= 0, \quad \text{在 } y = 0 \quad (33)$$

$$\left[ \frac{\partial y}{\partial \beta} \frac{\partial \phi_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial \phi_2}{\partial \beta} \right] \left[ \frac{\partial y}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \right]$$

$$\left[ \frac{1}{J} \left[ \left[ \frac{\partial \phi_1}{\partial \alpha} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \phi_1}{\partial \beta} \right]^2 \right. \right.$$

$$\left. \left. - r_\rho \left[ \left[ \frac{\partial \phi_2}{\partial \alpha} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \phi_2}{\partial \beta} \right]^2 \right] \right] \right]$$

$$+ 2JF^{-2} \left[ \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial \phi_2}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial \phi_2}{\partial \alpha} \right]$$

$$= 0, \quad \text{在 } y = 0 \quad (34)$$

$$\left[ \frac{\partial y}{\partial \beta} \frac{\partial \phi_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial \phi_1}{\partial \beta} \right] \left[ \frac{\partial y}{\partial \beta} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} - \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right]$$

$$= J \left[ \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial \phi_1}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial \phi_1}{\partial \alpha} \right]$$

$$= 0, \quad \text{在 } y = 0 \quad (35)$$

其中  $J$  是賈可比 (Jacobian)，其表示式為

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)}$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{i=t} 2a_i \frac{\partial X_i}{\partial \alpha}$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=t} \sum_{j=1}^{j=t} a_i a_j \left[ \frac{\partial X_i}{\partial \alpha} \frac{\partial X_j}{\partial \alpha} + \frac{\partial X_i}{\partial \beta} \frac{\partial X_j}{\partial \beta} \right]$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{i=t} a_i J_i + \sum_{i=1}^{i=t} \sum_{j=1}^{j=t} a_i a_j J_{ij}$$

假設上下層之速度勢分別為

$$\phi_1 = \alpha + \sum_{i=1}^{i=t} a_i \phi_{1i} + \sum_{i=1}^{i=t} \sum_{j=1}^{j=t} a_i a_j \phi_{1ij}$$

$$\phi_2 = r_u \alpha + \sum_{i=1}^{i=t} a_i \phi_{2i} + \sum_{i=1}^{i=t} \sum_{j=1}^{j=t} a_i a_j \phi_{2ij}$$

$$\eta = \sum_{i=1}^{i=t} a_i \eta_i + \sum_{i=1}^{i=t} \sum_{j=1}^{j=t} a_i a_j \eta_{ij}$$

將上式代入 (33) 式，(34) 式及 (35) 式，提出一階  $a_i$  及二階  $a_i a_j$  之前面之係數項，可表示如下考慮一階  $a_i$  之微擾控制方程式組為

$$\frac{\partial^2 \phi_{1i}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \phi_{1i}}{\partial \beta^2} = 0 \quad (36)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_{2i}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \phi_{2i}}{\partial \beta^2} = 0 \quad (37)$$

$$\frac{\partial \phi_{1i}}{\partial \beta} = 0, \quad \text{在 } y = -h \quad (38)$$

$$\frac{\partial \phi_{2i}}{\partial \beta} = 0, \quad \text{在 } y = d \quad (39)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_{1i}}{\partial \alpha^2} - r_\rho r_u \frac{\partial^2 \phi_{2i}}{\partial \alpha^2} - (1 - r_\rho r_u^2) \frac{\partial J_i}{\partial \alpha} + F^{-2} \left( \frac{\partial \phi_{1i}}{\partial \beta} - \frac{\partial X_i}{\partial \beta} \right) = 0, \text{ 在 } y = 0 \quad (40)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_{1i}}{\partial \alpha^2} - r_\rho r_u \frac{\partial^2 \phi_{2i}}{\partial \alpha^2} - (1 - r_\rho r_u^2) \frac{\partial J_i}{\partial \alpha} + F^{-2} \left( \frac{1}{r_u} \frac{\partial \phi_{2i}}{\partial \beta} - \frac{\partial X_i}{\partial \beta} \right) = 0, \text{ 在 } y = 0 \quad (41)$$

$$\frac{\partial \eta_i}{\alpha} = \frac{\partial \phi_{1i}}{\beta} - \frac{\partial X_i}{\beta} \quad (42)$$

考慮二階  $a_i a_j$  之微擾控制方程式組則為

$$\frac{\partial^2 \phi_{1ij}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \phi_{1ij}}{\partial \beta^2} = 0 \quad (43)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_{2ij}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \phi_{2ij}}{\partial \beta^2} = 0 \quad (44)$$

$$\frac{\partial \phi_{1ij}}{\partial \beta} = 0, \text{ 在 } y = -h \quad (45)$$

$$\frac{\partial \phi_{2ij}}{\partial \beta} = 0, \text{ 在 } y = d \quad (46)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi_{1i}}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \phi_{1j}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial \phi_{1i}}{\partial \beta} \frac{\partial^2 \phi_{1j}}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 \phi_{1ij}}{\partial \alpha^2} \\ & - r_\rho \left( \frac{\partial \phi_{2i}}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \phi_{2j}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial \phi_{2i}}{\partial \beta} \frac{\partial^2 \phi_{2j}}{\partial \alpha \partial \beta} + r_u \frac{\partial^2 \phi_{2ij}}{\partial \alpha^2} \right) \\ & + 3 \frac{\partial Y_i}{\partial \beta} \left( \frac{\partial^2 \phi_{1j}}{\partial \alpha^2} - r_\rho r_u \frac{\partial^2 \phi_{2j}}{\partial \beta^2} \right) \\ & - \frac{\partial Y_i}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial^2 \phi_{1j}}{\partial \alpha \partial \beta} - r_\rho r_u \frac{\partial^2 \phi_{2j}}{\partial \alpha \partial \beta} \right) \\ & - (1 - r_\rho r_u^2) \left( \frac{\partial J_i}{\partial \alpha} \frac{\partial Y_j}{\partial \beta} - \frac{\partial J_i}{\partial \beta} \frac{\partial Y_j}{\partial \alpha} + \frac{\partial J_{ij}}{\partial \alpha} \right) \\ & + F^{-2} \left( \frac{\partial \phi_{1ij}}{\partial \beta} + 6 \frac{\partial X_i}{\partial \alpha} \frac{\partial \phi_{1j}}{\partial \beta} \right. \\ & \left. - 5 \frac{\partial X_i}{\partial \alpha} \frac{\partial X_j}{\partial \beta} - \frac{\partial \phi_{1i}}{\partial \alpha} \frac{\partial \phi_{1j}}{\partial \beta} \right) \\ & - 2 \frac{\partial J_i}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial \phi_{1j}}{\partial \alpha} - r_\rho r_u \frac{\partial \phi_{2j}}{\partial \alpha} \right) \\ & = 0, \text{ 在 } y = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi_{1ij}}{\partial \beta} - \frac{1}{r_u} \frac{\partial \phi_{2ij}}{\partial \beta} \\ & = \frac{\partial \phi_{1i}}{\partial \beta} \left( \frac{\partial \phi_{1i}}{\partial \alpha} - \frac{1}{r_u} \frac{\partial \phi_{2j}}{\partial \alpha} \right), \\ & \text{在 } y = 0 \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_{ij}}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \phi_{1ij}}{\partial \beta} + \frac{\partial X_i}{\partial \alpha} \frac{\partial \phi_{1j}}{\partial \beta} \\ & - \frac{\partial \phi_{1i}}{\partial \alpha} \frac{\partial \phi_{1j}}{\partial \beta} \end{aligned} \quad (49)$$

由(36)-(41)式，我們可以令一階  $a_i$  之速度勢分別為

$$\phi_{1i} = W_i A_1 \sin k(\alpha + \alpha_i) \cosh k(\beta + h)$$

$$\phi_{2i} = W_i A_2 \sin k(\alpha + \alpha_i) \cosh k(\beta - d)$$

其中

$$A_2 = -A_1 r_u \frac{\sinh(kh)}{\sinh(kd)}$$

$$A_1 = \frac{(k(1 - r_\rho r_u^2) + F^{-2}) \frac{1}{\cosh(kh)}}{-F^{-2} \tanh(kh) + k \left( 1 + r_\rho r_u^2 \frac{\tanh(kh)}{\tanh(kd)} \right)}$$

代入(42)式後即得一階波高變位為

$$\begin{aligned} \eta_i &= -W_i (A_1 \sinh(kh) + 1) \\ & \cdot \cos k(\alpha + \alpha_i) \end{aligned}$$

如果又令

$$\begin{aligned} \phi_{1ij} &= \frac{k^2}{2} W_i W_j B_1 \sin k(2\alpha + \alpha_i + \alpha_j) \\ & \cdot \cosh 2k(\beta + h) \\ \phi_{2ij} &= \frac{k^2}{2} W_i W_j B_2 \sin k(2\alpha + \alpha_i + \alpha_j) \\ & \cdot \cosh 2k(\beta - d) \end{aligned}$$

將上假設代入(47)式及(48)式，我們可解其未知係數為

$$\begin{aligned} B_1 &= \left\{ A_1^2 (D_1 - D_2 + D_3) + A_1 (D_4 \right. \\ & \left. + D_5 - D_6) - 10kF^{-2} \right\} / \\ & \left\{ -4k^2 \cosh(2kh) T \right\} \end{aligned}$$

$$B_2 = \frac{r_u \sinh(2kh)}{2k \sinh(2kd)}$$

$$\left[ \frac{A_1^2}{2} \left[ 1 + \frac{\tanh(kh)}{\tanh(kd)} \right] - 2kB_1 \right]$$

其中

$$D_1 = 2k^2 \left( 1 - r_\rho r_u^2 \frac{\cosh(2kh) - 1}{\cosh(2kd) - 1} \right)$$

$$D_2 = 2k^2 r_\rho r_u^2 \frac{\sinh(2kh)}{\tanh(2kd)} \left( 1 + \frac{\tanh(kh)}{\tanh(kd)} \right)$$

$$D_3 = kF^{-2} \sinh(2kh)$$

$$D_4 = 2k^2 \cosh(kh)(1 - r_\rho r_u^2) \tanh(kh)$$

$$D_5 = -2k^2 \cosh(kh) \left( 1 + r_\rho r_u^2 \frac{\tanh(kh)}{\tanh(kd)} \right)$$

$$D_6 = 12kF^{-2} \sinh(kh)$$

$$T = 2k \left[ 1 + r_\rho r_u^2 \frac{\tanh(2kh)}{\tanh(2kd)} \right]$$

$$- F^{-2} \tanh(2kh)$$

由(49)式，我們又可解得二階之波高變位為

$$\eta_{ij} = -W_i W_j \frac{k}{4} \cos k(2\alpha + \alpha_i + \alpha_j)$$

$$\left( \frac{\left( 2kB_1 - \frac{A_1^2}{2} \right) \sinh(2kh)}{+ A_1 \sinh(kh)} \right)$$

由前階各項之推導我們可得介面波高變位為

$$\eta_{\text{doublet}} = - \sum_{i=1}^{i=t} a_i W_i \cos k(\alpha + \alpha_i)$$

$$\cdot (A_1 \sinh(kh) + 1)$$

$$- \sum_{i=1}^{i=t} \sum_{j=1}^{j=t} a_i a_j W_i W_j \frac{k}{4}$$

$$\cdot \cos k(2\alpha + \alpha_i + \alpha_j)$$

$$\left( \frac{\left( 2kB_1 - \frac{A_1^2}{2} \right) \sinh(2kh)}{+ A_1 \sinh(kh)} \right)$$

其中 $\eta_{\text{doublet}}$ 得自於(23)式之座標系統，而下標doublet則表座標系統取自複數中之偶流形式者。

## 2. 均勻二層流通過起伏之地形

由前面所提之流場，我們可以另外假設底床起伏之座標系統為

$$X = \alpha$$

$$Y = \beta + \sum_{i=1}^{i=t} \frac{a_i s_i}{(\alpha + \alpha_i)^2 + s_i^2}$$

$$= \int_0^\infty s_m \exp^{-s_m k} \left( \beta + \sum_{i=1}^{i=t} \frac{a_i}{s_m} \right.$$

$$\left. \cdot \exp^{(s_m - s_i)k} \cos k(\alpha + \alpha_i) \right) dk \quad (50)$$

$$X = \alpha + \sum_{i=1}^{i=t} \frac{a_i(\alpha + \alpha_i)}{(\alpha + \alpha_i)^2 + (\beta + s_i)^2}$$

$$= \int_0^\infty s_m \exp^{-s_m k} \left( \alpha + \sum_{i=1}^{i=t} \frac{a_i}{s_m} \right.$$

$$\left. \cdot \exp^{(s_m - s_i - \beta)k} \sin k(\alpha + \alpha_i) \right) dk$$

$$Y = \beta - \sum_{i=1}^{i=t} \frac{a_i(\beta + s_i)}{(\alpha + \alpha_i)^2 + (\beta + s_i)^2}$$

$$= \int_0^\infty s_m \exp^{-s_m k} \left( \beta - \sum_{i=1}^{i=t} \frac{a_i}{s_m} \right.$$

$$\left. \cdot \exp^{(s_m - s_i - \beta)k} \cos k(\alpha + \alpha_i) \right) dk \quad (51)$$

如圖3所示，(X, Y)是底床隆起之座標系統，我們找到一個積分轉換關係式，使(22)式和(23)式可以相對應到(50)式和(51)式，基於相同的理由，我們也可以將在波形底床上之介面波高變位，轉換到起伏地形上，因此和前面相同之步驟計算可得其結果如下

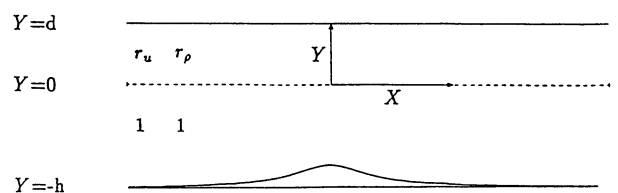


圖3 底床隆起之示意圖

$$\eta_{\text{Lamb}} = \sum_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ k \left[ 1 + r_{\rho} r_u^2 \frac{\sinh(kh)}{\sinh(kd)} \right] \cdot \frac{a_i \cos k(x + \alpha_i)}{\cosh(kh)} \exp^{-s_i k} \right\} /$$

$$\left\{ -F_c^{-2} \tanh(kh) + k \left[ 1 + r_{\rho} r_u^2 \frac{\tanh(kh)}{\tanh(kd)} \right] \right\} dk$$

$$\eta_{\text{doublet}} = - \sum_{i=1}^{i=t} \int_0^{\infty} a_i \exp^{-s_i k} \cos k(\alpha + \alpha_i) \cdot (A_1 \sinh(kh) + 1) dk$$

$$- \sum_{i=1}^{i=t} \sum_{j=1}^{j=t} \int_0^{\infty} \frac{a_i a_j k}{4s_m} \exp^{(s_m - s_i - s_j)k} \cdot \cos k(2\alpha + \alpha_i + \alpha_j) dk$$

$$\left( \left( 2kB_1 - \frac{A_1^2}{2} \right) \sinh(2kh) + A_1 \sinh(kh) \right)$$

如圖 4 所示，當所有的參數都為定值時，我們可以由圖中發現當  $s$  愈大，所引起的擾動波振幅愈小，這是因為底床起伏愈緩愈平滑，則在垂直方向受重力影響所引致的動量變化愈小之故。由於使用的座標系統不同，所以在  $s$  不是很大時，會產生相當大的誤差，因而在  $\eta_{\text{Lamb}}$  之座標系統， $s > 0$  即可以讓積分式收斂，但是在  $\eta_{\text{doublet}}$  之座標系統中， $s > h$  滿足在底床之積分式收斂的條件，我們也發現當  $s$  不是很大時

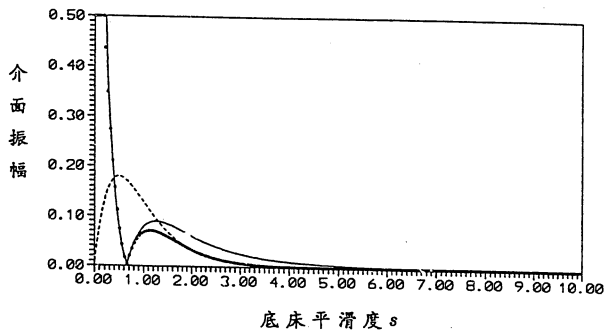


圖 4 介面振幅與底床平滑度  $s$  之關係圖  
(---線性波  $\eta_{\text{Lamb}}$ ，...線性波  $\eta_{\text{doublet}}$ ，  
—非線性波  $\eta_{\text{doublet}}$ )

，線性內重力波與非線性內重力波有著明顯的差異存在，而這差異量正是本文所探討之重點之一。

臨界福祿數  $F_c$  值的確立，乃判別次臨界流與超臨界流的重要判斷依據，而共振現象的發生，都是由於在  $k$  值很小而滿足下式所得的結果

$$-F_c^{-2} \tanh(kh)$$

$$+ k \left( 1 + r_{\rho} r_u^2 \frac{\tanh(kh)}{\tanh(kd)} \right) \approx 0$$

$$-F_c^{-2} \tanh(2kh)$$

$$+ 2k \left( 1 + r_{\rho} r_u^2 \frac{\tanh(2kh)}{\tanh(2kd)} \right) \approx 0$$

$$-F_c^{-2} kh + k \left( 1 + r_{\rho} r_u^2 \frac{kh}{kd} \right) \approx 0$$

$$-F_c^{-2} h + 1 + r_{\rho} r_u^2 \frac{h}{d} \approx 0$$

得其近似關係式為

$$F_c = \sqrt{\frac{hd}{d + r_{\rho} r_u^2 h}}$$

上式亦即表示  $\rho$  和  $U_1$ ， $U_2$ ， $h$  及  $d$  之關係如下

$$r_{\rho} = \frac{\left( 1 - \frac{U_1^2}{gh} \right)}{\left( 1 + \frac{U_2^2}{gd} \right)}$$

如果  $r_{\rho} > 1$  時，亦即較重的液體在上面的情況，會使福祿數  $F$  值是虛數，所以介面不穩定。當  $r_{\rho} = 1$  時，雖然福祿數  $F$  趨於無窮大；但是依然可以得到其速度勢及波高解，如果存在一個速度的不連續狀態，因我們已忽略黏滯性，所以並不構成剪力層存在的條件，因之漢荷茲－雷萊不穩定性(Helmholtz-Rayleigh instability)本文不需另加探討。

我們比較關心  $r_{\rho} < 1$  的情況，當  $U_1 < \sqrt{gh}$  時，會使介面產生起伏的擾動現象，但是當  $U_1 > \sqrt{gh}$  時，不論其它參數如何變化，介面都不會有擾動波產生，如圖 5 所示，我們令



$$F_2^2 = \frac{U_2^2}{gd} \quad \text{爲上層福祿數}$$

$$F_1^2 = \frac{U_1^2}{gh} \quad \text{爲下層福祿數}$$

當  $F_2^2$  愈大時，能存在於次臨界流之  $r_\rho$  會愈小，但是在自然界中，除了在大氣層或海洋之層變流，可能會有超臨界流出現，其它如空氣與水之介面，除非  $U_1$  很接近  $\sqrt{gh}$ ，否則單要靠風力產生超臨界流是很難的。因之如圖5所示， $F_2$  大於1時上層流域已變超臨界流狀態，前述控制方程式已改變，故其結果僅供參考而已。

而圖6則是當  $F_1 < 1$  且  $F_2$  固定時，密度比變化對流場所造成的影響，我們發現振幅隨密度比之增大而增大，當接近臨界密度比時，會因振幅過大導致下層流體太接近自由液面，造成

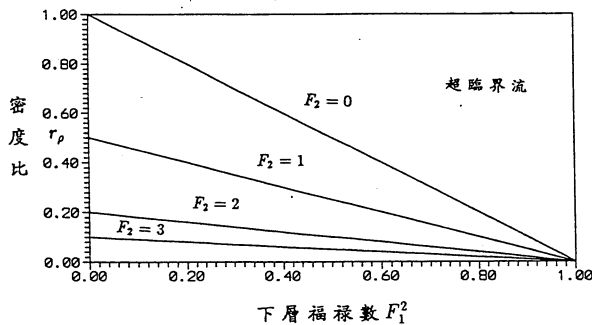


圖5 密度比  $r_\rho$  與下層福祿數之關係圖

(---線性波  $\eta_{Lamb}$ , ...線性波  $\eta_{doublet}$ ,  
—非線性波  $\eta_{doublet}$ )

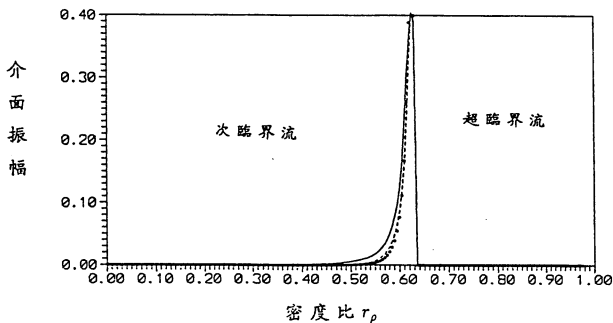


圖6 介面振幅與密度比  $r_\rho$  之關係圖

(---線性波  $\eta_{Lamb}$ , ...線性波  $\eta_{doublet}$ ,  
—非線性波  $\eta_{doublet}$ )

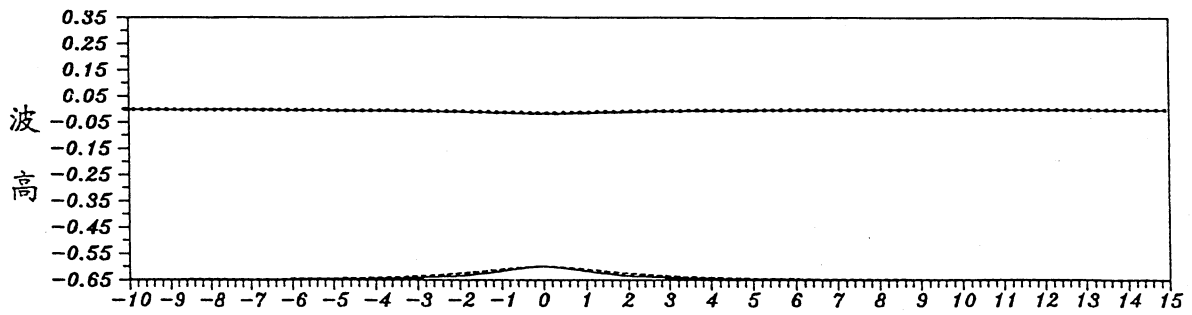
上層流體的不連續狀態，但是密度比大於某一臨界密度比時，則無擾動波產生之超臨界流。

從結果顯示(圖7和圖8,  $s=2$ ,  $a_{Lamb} = 0.1$ ,  $a_{doublet} = 0.0675$ ,  $r_u = 1$ ,  $r_\rho = 0.99$ ,  $d = 0.35$ ,  $h = 0.65$ )，當特徵水深固定，流動緩慢時，介面幾乎看不出有任何擾動現象發生(如圖7之a、b, 圖8之a)，當福祿數慢慢增加時，波高會因底床緩慢變化的影響，引起動量變化而擾動流域，使介面在平均水位上垂直起伏，受重力作用而有暫定波(stationary wave)產生(如圖7之c、d、e, 圖8之b、c、d)，當福祿數逐漸接近臨界福祿數時，波高受邊界的影響會愈明顯，非線性之影響愈來愈大，使得介面所產生的波紋擾動振幅增加(如圖7之f, 圖8之e)，當更接近臨界值  $F_c$  時，這時波紋擾動現象的振幅會逐漸地增加，使得微小振幅波理論不適用，最後形成不穩定的共振現象，導致介面會有碎波因而介面有紊流生成，如圖8之f所示，但福祿數高於臨界福祿數時，則是無波紋擾動現象的超臨界流了(如圖7之g、h, 圖8之g、h)。

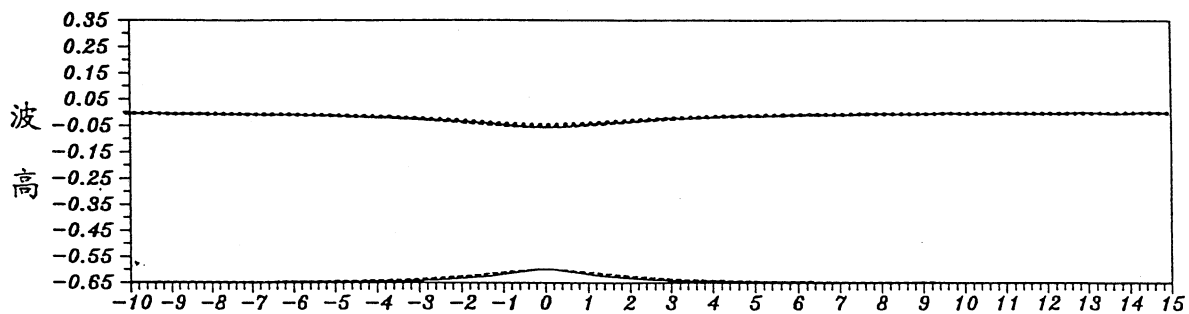
## 結 論

由前面之理論推導及計算結果，我們可得到以下的結論：

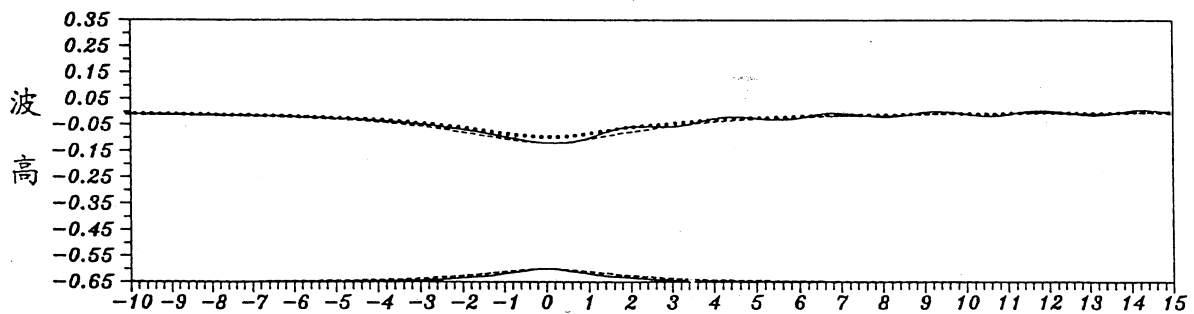
1. 均勻流通過起伏地形時，在亞臨界流 ( $F < F_c$ ) 會有擾動的內重力波產生，當接近臨界流  $F_c$  時，其內重力波之波峰過高時，亦即振幅較大時，會有內重力碎波的產生，但是在超臨界流 ( $F > F_c$ ) 時，則只是局部擾動而無內重力波產生。
2. 福祿數  $F$  在遠離臨界福祿數  $F_c$  值時， $\eta_{Lamb}$  及  $\eta_{doublet}$  兩者差異很微少，但在接近臨界流時，其線性波高兩者幾乎完全相同，若同時趨近臨界流時，非線性波所引起的致波部分，則與線性波有較明顯的差異。
3. 整個流場內重力波之變化，以密度比、流速比及水深比為其主要控制因素，而底床起伏之大小，則是比率放大因子，為次要控制因



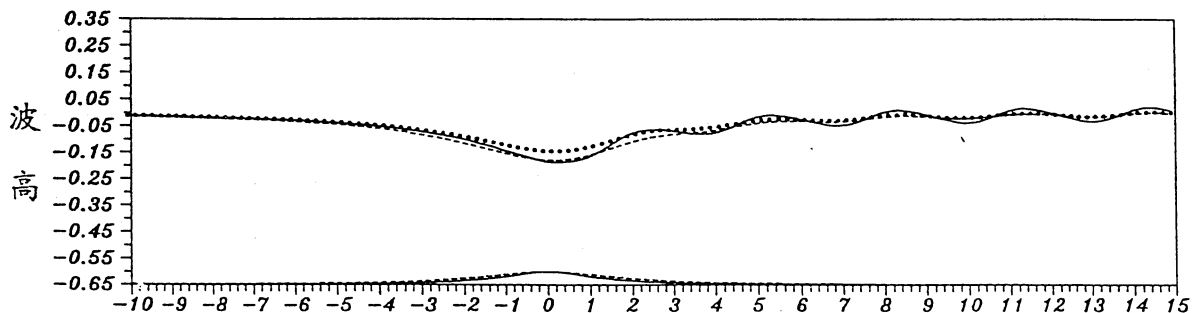
(a). X方向(單位: 總水深)  
(福祿數 0.25, 縱橫比 1 : 6.25)



(b). X方向(單位: 總水深)  
(福祿數 0.35, 縱橫比 1 : 6.25)



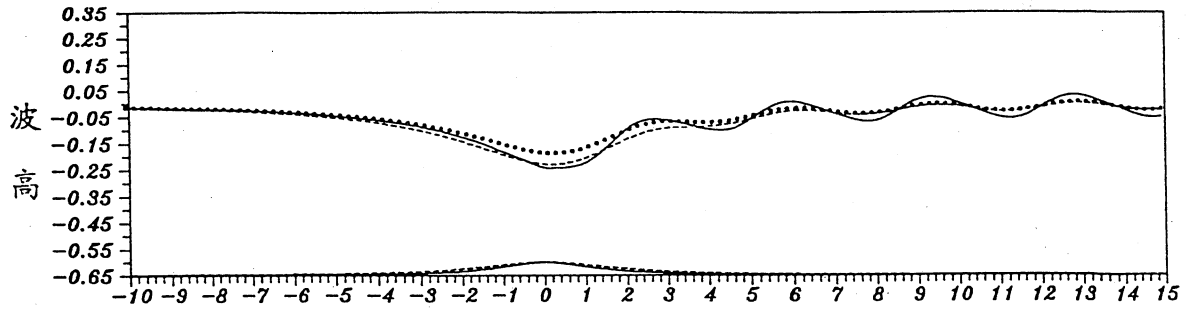
(c). X方向(單位: 總水深)  
(福祿數 0.40, 縱橫比 1 : 6.25)



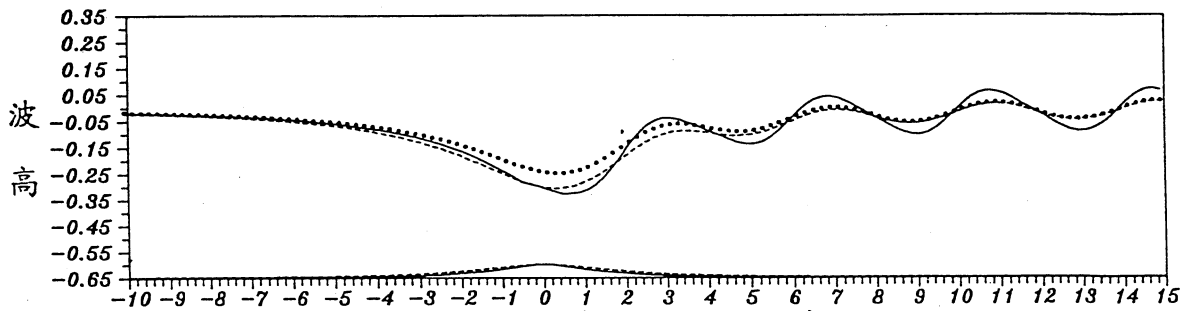
(d). X方向(單位: 總水深)  
(福祿數 0.42, 縱橫比 1 : 6.25)

圖7 波高對隆起地形X方向變位之圖

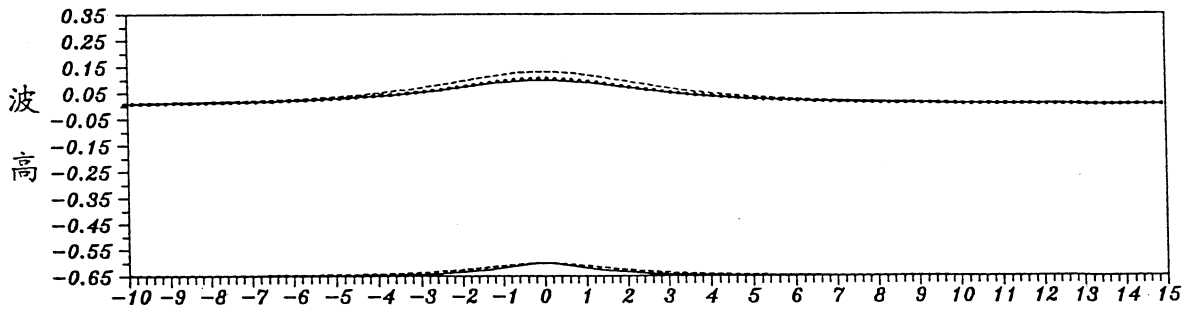
(---線性波 $\eta_{Lamb}$ , ...線性波 $\eta_{doublet}$ , —非線性波 $\eta_{doublet}$ )



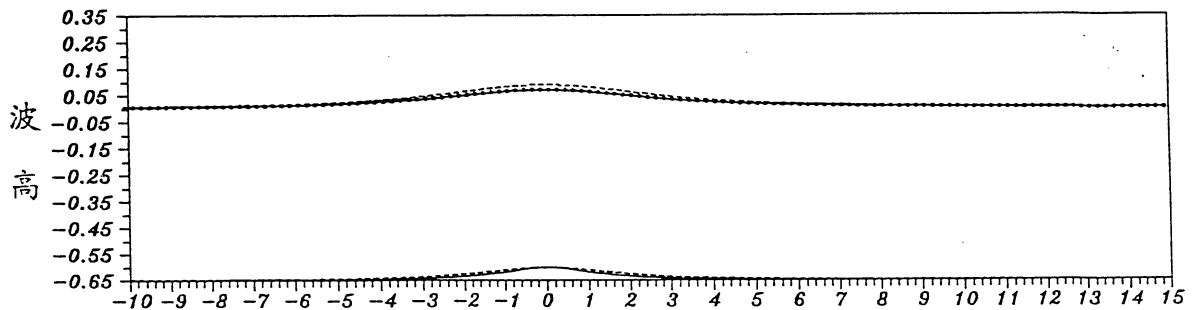
(e). X方向(單位:總水深)  
(福祿數0.43, 縱橫比1:6.25)



(f). X方向(單位:總水深)  
(福祿數0.44, 縱橫比1:6.25)



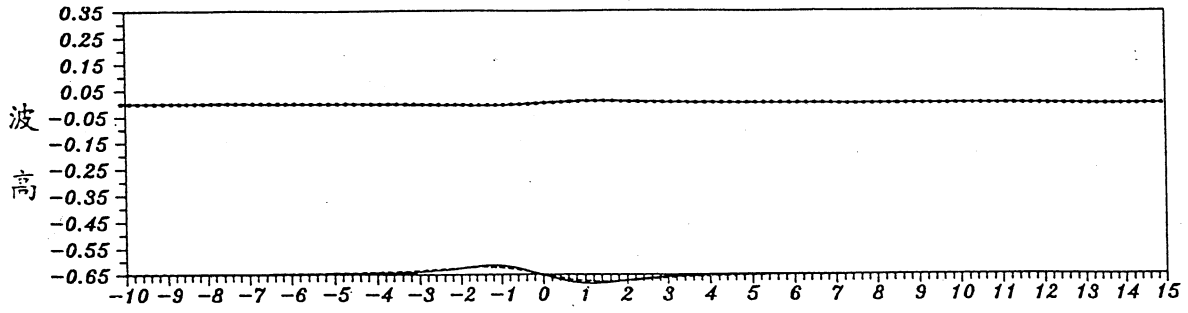
(g). X方向(單位:總水深)  
(福祿數0.60, 縱橫比1:6.25)



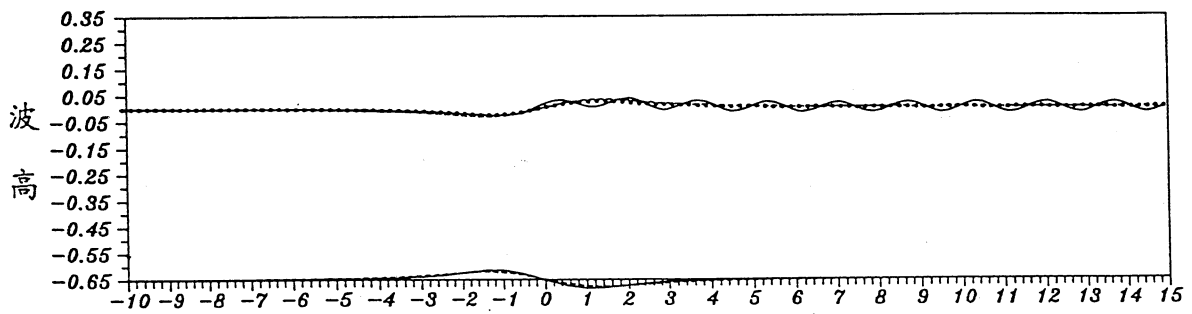
(h). X方向(單位:總水深)  
(福祿數0.70, 縱橫比1:6.25)

圖7(續) 波高對隆起地形X方向變位之圖

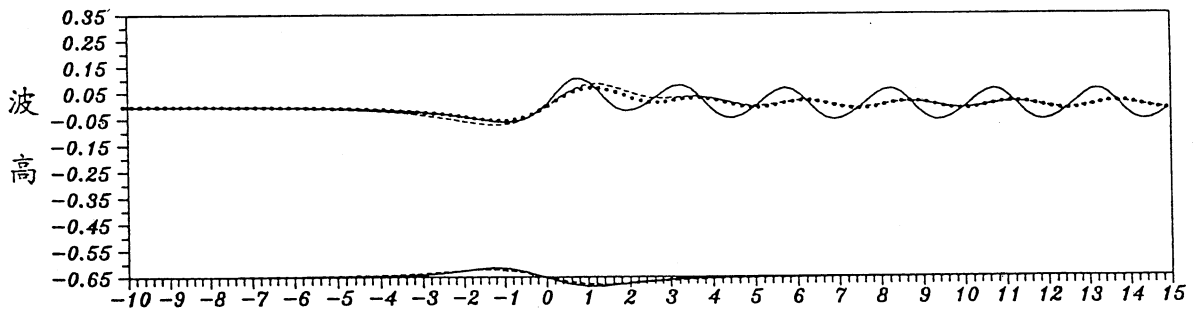
(--- 線性波 $\eta_{Lamb}$ , ... 線性波 $\eta_{doublet}$ , — 非線性波 $\eta_{doublet}$ )



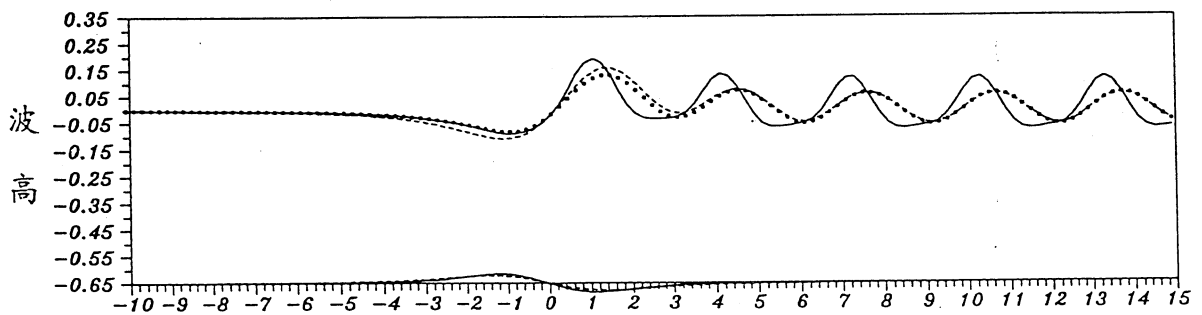
(a). X方向(單位: 總水深)  
(福祿數0.25, 縱橫比1: 6.25)



(b). X方向(單位: 總水深)  
(福祿數0.35, 縱橫比1: 6.25)



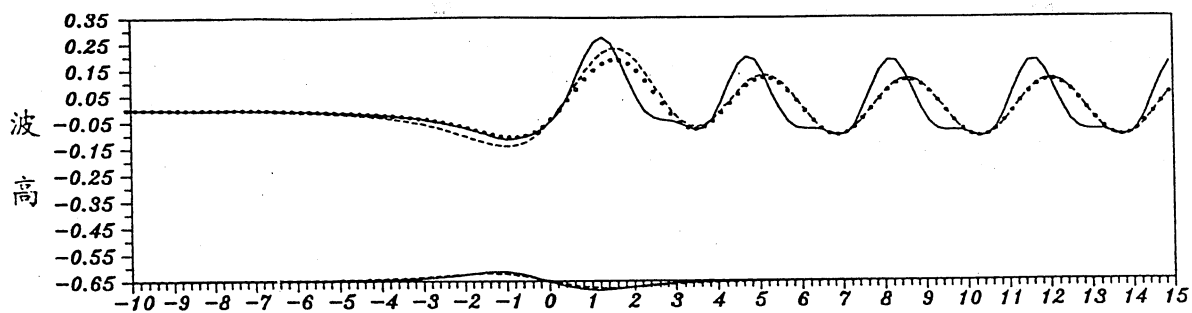
(c). X方向(單位: 總水深)  
(福祿數0.40, 縱橫比1: 6.25)



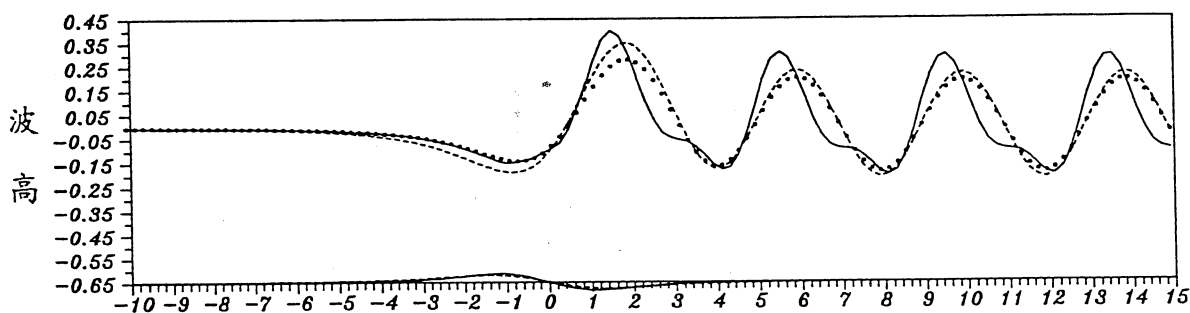
(d). X方向(單位: 總水深)  
(福祿數0.42, 縱橫比1: 6.25)

圖8 波高對凸凹地形X方向變位之圖

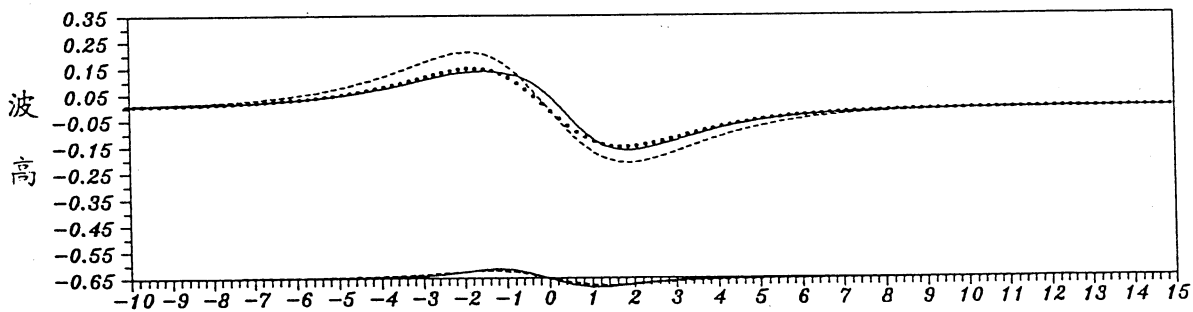
(---線性波 $\eta_{Lamb}$ , .....線性波 $\eta_{doublet}$ , ——非線性波 $\eta_{doublet}$ )



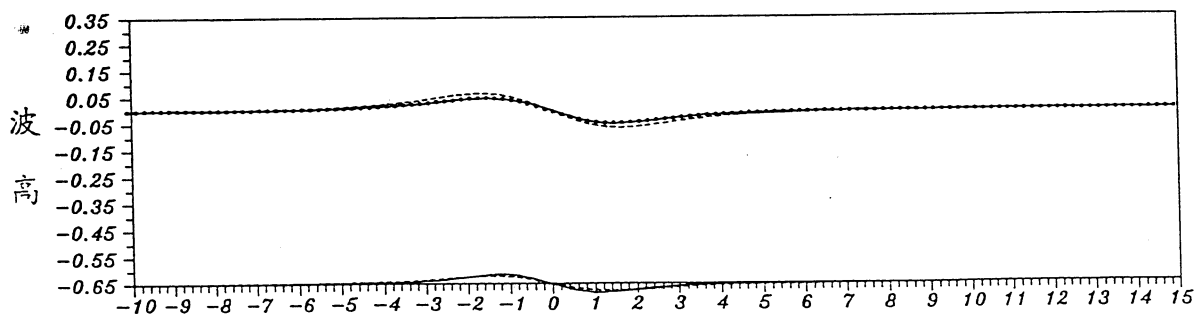
(e). X方向(單位:總水深)  
(福祿數0.43, 縱橫比1:6.25)



(f). X方向(單位:總水深)  
(福祿數0.44, 縱橫比1:6.25)



(g). X方向(單位:總水深)  
(福祿數0.50, 縱橫比1:6.25)



(h). X方向(單位:總水深)  
(福祿數0.60, 縱橫比1:6.25)

圖8(續) 波高對凸凹地形X方向變位之圖

(--- 線性波 $\eta_{Lamb}$ , .....線性波 $\eta_{doublet}$ , ——非線性波 $\eta_{doublet}$ )

素，不過真正能引起擾動波的先決條件，在於下層流之福祿數 $F_1$ 必須小於1才可。

### 符號說明

$a$	: 波形底床之微擾振幅量
$d$	: 上層流之水深
$F$	: 福祿數(Froude number)
$F_1$	: 下層流之福祿數
$F_2$	: 上層流之福祿數
$g$	: 重力加速度
$h$	: 下層流之水深
$k$	: 波數(wave number)
$L$	: 總水深
$P$	: 界面壓力
$s$	: 底床起伏之光滑度
$U_1$	: 下層流之流速
$U_2$	: 上層流之流速
$(x, y)$	: 轉換前之座標系統
$(X, Y)$	: 積分轉換後之座標系統
$(\alpha, \beta)$	: 轉換後之座標系統
$\rho_1$	: 下層流之密度
$\rho_2$	: 上層流之密度
$r_u$	: 速度比( $U_2/U_1$ )
$r_\rho$	: 密度比( $\rho_2/\rho_1$ )
$\eta$	: 介面之變位
$\phi_1$	: 下層流之速度勢(velocity potential)
$\phi_2$	: 上層流之速度勢
$\psi_1$	: 下層流之速函數(stream function)
$\psi_2$	: 上層流之速函數

### 參考資料

- [1] Baines, P.G., "A Unified Description of Two-Layer Flow Over Topography," *J. Fluid Mech.*, 146, pp.127-167, 1984.
- [2] Bontozoglou, V., S. Kalliadasis & A.J. Karabelas "Inviscid Free-surface Flow over a Periodic Wall," *J. Fluid Mech.*, 226, pp. 189-203, 1991.
- [3] Davies, A.G. & A.D. Heathershaw, "Surface-Wave Propagation over Sinusoidally Varying Topography," *J. Fluid Mech.*, 144, pp.419-443, 1984.
- [4] Kong, C.H. & T.S. Wan, "Internal Waves in Stratified Fluids Contained in Basins of Variable Depth," *Journal of the Society of Naval Architects and Marine Engineers*, Vol.6, pp.43-64, 1987.
- [5] Kranenburg, C., J.D. Pietrzak, & G. Abraham, "Trapped Internal Waves over Undular Topography," *J. Fluid Mech.* 226, pp.205-217, 1991.
- [6] Lamb, H., *Hydrodynamics*, Cambridge University Press, pp.409-410, 1932.
- [7] Mathew, J., & T.R. Akylas, "On Three-dimensional Long Waterwaves in a Channel with Sloping Sidewalls," *J. Fluid Mech.*, 215, pp.289-307, 1990.
- [8] Miles, J.W., "Stationary Transcritical Channel Flow", *J. Fluid Mech.*, 162, pp. 489-499, 1986.
- [9] Saffman, P.G. & H.C. Yuen, "Finite-amplitude Interfacial-Waves in the Presence of a Current," *J. Fluid Mech.*, 123. pp.459-476, 1982.
- [10] Tetsu, Hara & C.C. Mei, "Bragg Scattering of Surface Waves by Periodic Bars: Theory and Experiment," *J. Fluid Mech.*, 178, pp.221-241, 1987.
- [11] Yih, C.S., "Waves in Meandering Streams," *J. Fluid Mech.*, 130, pp.109-121, 1983.
- [12] Yih, C.S., *Stratified Flows*, Academic Press, 1980.