# Chapter 8

# 資產報酬率與風險

前面數章的討論大都假設投資計畫執行期間內，各年度總現金流量皆無風險，計算這些無風險現金流量的現值時均以無風險利率做為折現率。由於大部分投資計畫各期總現金流量都有不同程度的風險，所以，計算現值或淨現值時就不能再以無風險利率做為折現率。也就是說，有風險情形下，資本預算決策就必須考慮風險對資本 (機會) 成本 (即折現率) 的影響。第八章先檢視資本市場中重要資產報酬率時間序列所呈現的兩個典型現象 (stylized facts)：資產風險愈高，平均報酬率愈高。亦即，金融性資產報酬率時間序列呈現「高風險高報酬」現象。其次，個別資產的報酬率標準誤較投資組合 (portfolio) 報酬率的標準誤為高。亦即，金融性資產報酬率時間序列呈現「分散持有可降低風險」的現象。接著將介紹如何衡量投資組合報酬率的風險以及分散持有對投資組合風險衡量的影響。

> 資產風險愈高，平均報酬率愈高。

> 個別資產的報酬率標準誤較投資組合 (portfolio) 報酬率的標準誤為高。

第九章將討論如何決定個別資產報酬率 (或資產價格)。現代投資組合理論 (modern portfolio theory) 假設資本市場具有效率性 (efficiency)，一個市場具有效率性係指市場中商品價格已充份反映所有與這個商品有關的資訊。所以，現代投資組合理論探討的重點在於：有風險情形下，資產預期報酬率和風險間的關係為何？最精確說明這兩者關係是**資本資產定價模型** (capital asset pricing model，以 CAPM 簡記)。這個模型最核心為：市場投資者若可依其自由意願選擇資產，由於個別資產有一部分風險可以透過分散持有而消除，這部分風險就沒有任何價值，故個別資產的預期報酬率不應以該資產總風險來決定，而應以總風險中無法透過分散持有消除的部分 (即市場風險) 所決定。

無法透過分散持有消除的個別資產報酬率風險溢酬可用市場投資組合風險溢酬及該個別資產 $\beta$ 值 (即此個別資產的市場風險相對大小) 來衡量，而 $\beta$ 值則決定於市場投資組合報酬率與該個別資產報酬率共變異數 (即個別資產市場風險)。第九章將先說明無借貸限制情形下，如何決定市場投資組合。初學者普遍感覺以下三章是財務管理課程中最難懂的部分。為加強學習效果，進入第八章前，先將第八章至第十章重要結果簡述如下：

❖ 當投資者可選擇持有由不同資產所形成的投資組合時，由於分散持有可降低風險，此時投資人所關心的應是某一特定資產持有比重變動對投資

組合風險的影響。由於不同資產報酬率的變動會因分散持有而部份抵銷，造成報酬率標準誤不再是衡量風險良好的指標。亦即，個別資產風險可拆解為獨特風險及市場風險，其中獨特風險可藉充份分散持有而消除，本書將以 $\beta$ 值表示充分分散持有情形下，個別資產市場風險的相對大小，$\beta$ 值最重要決定要素為該個別資產報酬率與市場投資組合報酬率間共變異數 (covariance)。舉例說，若某一家公司股票報酬率隨市場投資組合報酬率下降而上升 (下降)，表示市場投資組合報酬率與該個別資產報酬率共變異數值為負 (正)，則這家公司股票報酬率的 $\beta$ 值為負 (正)。由於市場投資組合報酬率與這家公司股票報酬率呈反向 (同向) 變動，增加 (減少) 該公司股票持有比重會抵銷部分市場投資組合報酬率的波動而讓市場投資組合風險變小。

> $\beta$ 值最重要決定因素為該個別資產報酬率與市場投資組合報酬率間共變異數 (covariance)。

❖ 投資者之所以願意持有某特定風險性資產，必然是該資產預期報酬率足以補償因持有該資產所承擔的市場風險。第九章導出個別資產預期報酬率和 $\beta$ 值存在以下的關係：

**資產預期報酬率＝無風險利率＋$\beta$×(市場投資組合預期報酬率－無風險利率)**

式中**市場投資組合** (market portfolio) 是資本市場處於均衡狀態下，若市場投資者皆無任何借貸限制，市場投資者將會選擇的最適風險性投資組合。它亦是符合「效率準則」的投資組合。所謂「效率準則」係指由於市場投資組合，預期報酬率大於無風險利率，個別資產風險溢酬相對於市場投資組合風險溢酬的大小則決定於 $\beta$ 值，$\beta$ 值為正且愈大表示這個資產報酬率變動相較於市場投資組合報酬率變動方向相同但幅度較大。換句話說，依上述關係來看，個別資產風險較市場投資組合為大時，該項個別資產預期報酬率自會較市場投資組合預期報酬率為大。上述關係式就是財務管理中最常被提及的資本資產定價模型。

> 所謂「效率準則」係指由於市場投資組合預期報酬率大於無風險資產報酬率，所以，$\beta$ 值愈大表示這個資產報酬率變動相較於市場投資組合報酬率變動方向相同但幅度較大。

❖ 計算有風險的現金流量現值時，必須對風險因素有所調整。由於折現率必須反映投資計畫的風險。有風險情形下，第一種調整現值的方法是找出正確反映計畫風險的折現率 (即折現率必須反映計畫風險)，然後利用

第三章現值公式算出現金流量現值；第二種方法是先剔除現金流量中受市場風險影響的部分，求出等值無風險現金流量，再以無風險利率做為折現率算出現值。這兩種方法所得到結果完全相同。

## ★ 1 資產報酬率統計量

資本市場中資產報酬率波動幅度很大。面對個別資產報酬率變化多端的走勢，最基本分析的方式就是利用基本統計量呈現不同資產報酬率走勢的統計特性，除了成長趨勢外，時間序列的特性還可由恆定及波動兩個面向衡量。表現這兩種特性最常用的統計量是以某一特定期間 (如：1991~ 2000 年期間或 2000 年) 資產報酬率期望值，來衡量資產報酬率恆定值及以資產報酬率變異數 (或標準誤) 衡量資產報酬率波動程度。

隨機變數 r 的期望值 (或稱預期值) 以 E[r] 表示。假設 $r_1, r_2, \cdots, r_T$ 為第 1 期到第 T 期資產報酬率的觀察值，T 為觀察樣本數，則資產報酬率的算術平均數 ($\bar{r}$) 可做為 E[r] 的估計值：

$$\bar{r} = \frac{r_1 + r_2 + \cdot\cdot\cdot + r_T}{T}$$

**例子：**

ABC 銀行在 20X1 年下半年各月份股票報酬率分別為 20.92%，0.00%，12.43%，-14.42%，2.92% 及 7.69%。 20X1 年下半年該銀行股票月平均報酬率為

$$\bar{r} = \frac{20.92\% + 0.00\% + 12.43\% - 14.42\% + 2.92\% + 7.69\%}{6}$$
$$= 4.92\%$$

如何衡量資產報酬率的不確定性迄今仍無定論。一般而言，某一資產報酬率上下波動程度很大，表示持有這個資產會有很高或很低實際報酬率的可能，持有這個資產的風險自然較大。依此概念，財務管理大都以衡量隨機變數離散程度的變異數 (variance) 或標準誤 (standard deviation) 做為衡量風險的指標。本書以資產報酬率變異數 (以 $\sigma^2$ 或 Var 表示) 或標準誤 (以 $\sigma$ 或 SD 表示) 做為衡量風險的指標。隨機變數 r 的變異數可定義為 $\sigma^2 = E[r - E[r]]^2$，其中 E[r]為 r 的期望值。實際計算時，$r_1, r_2, \cdots, r_T$ 樣本觀察值的變異數公式為

財務管理大都以衡量隨機變數離散程度的變異數 (variance) 或標準誤 (standard deviation) 做為衡量風險的指標。

$$\sigma^2 = \frac{1}{T-1}[(r_1 - \bar{r})^2 + (r_2 - \bar{r})^2 + \cdots + (r_T - \bar{r})^2]$$

雖然，變異數及標準誤都是衡量隨機變數的離散程度。實際應用時，由於變異數以平方和表現較難解釋，標準誤反而較易解釋，故多以報酬率標準誤衡量持有資產的風險。

## 例子：

ABC 公司股票在 20X1 年各季的報酬率分別是 11.62%，37.49%，43.61% 及 -8.42%。算出 ABC 公司股票 20X1 年季報酬率的變異數或標準誤前，須先算出平均報酬率：

$$\bar{r} = \frac{11.62\% + 37.49\% + 43.61\% - 8.42\%}{4} = 21.08\%$$

再利用變異數公式算出季報酬變異數及標準誤：

$$\sigma^2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}(11.62\% - 21.08\%)^2 + (37.49\% - 21.08\%)^2 \\ + (43.61\% - 21.08\%)^2 + (-8.4\% - 21.08\%)^2\end{bmatrix}$$

$$= 5.79\%$$

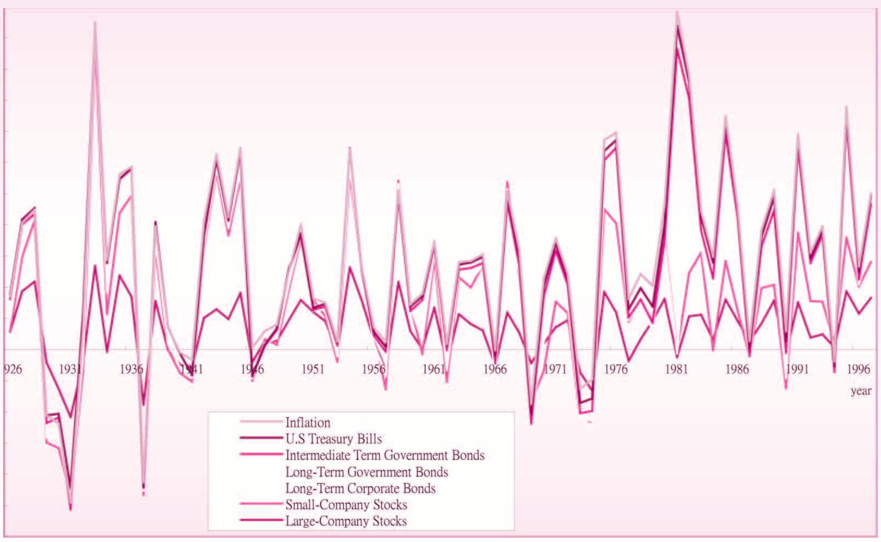
$$\sigma = \sqrt{5.79\%} = 2.41\%$$

## ★ 2 重要金融性資產報酬率的統計特性

在推導資產報酬率與風險間的關係以及個別資產報酬率如何決定之前，我們應先了解金融性資產報酬率資料的統計特性所呈現的典型現象。由於美國的資本市場發展較早，市場中交易的金融性資產種類繁多，故以美國幾種重要金融性資產報酬率的時間序列資料說明金融性資產的統計特性。【圖 8.1】為 1926 年到 1997 年間美國大型公司股票 (large-company stocks)、小型公司股票 (small-company stocks)，長期公司債 (long-term corporate bonds)，聯邦政府中長期公債 (intermediate and long-term government bonds) 以及美國財政部發行的短期債券 (treasury bills, 簡稱 T-bills) 等金融性資產的年平均報酬率以及年物價膨脹率 (inflation) 的走勢圖。由【圖 8.1】可看出美國聯邦政府中短期公債的平均報酬率波動幅度最小，為平衡政府歲出歲入差短，各國政府通常以發行中短期公債做為彌補政府歲出與歲入差短的財源。此外，美國聯邦政府財政部每週亦定期發行類似我國國庫券的一年期以下的公債 (T-bills)。T-bills 以零息債券型式發

> T-bills 的報酬率常被視為短期無風險資產報酬率。股票與其他風險性資產預期報酬率和 T-bills 報酬率間的差就是這些風險性資產的風險溢酬 (risk premium)。

**圖 8.1** 美國重要金融性資產報酬率走勢圖



行。由於美國聯邦政府擁有課稅權及印鈔權，其所發行 T-bills 違約風險幾乎不存在，故 T-bills 的報酬率常被視為短期無風險利率。股票與其他風險性資產預期報酬率和 T-bills 報酬率間的差就是這些風險性資產的風險溢酬 (risk premium)。風險溢酬之所以存在表示持有股票或其他金融性資產都有不同程度的風險，這些風險性資產報酬率必須較無風險資產報酬率為高以做為補償。

【表 8-1】列出上述金融性資產報酬率重要統計量。表中，資產報酬率平均數和標準誤分別是利用第 1 節中算術平均數及變異數公式算出。將各金融性資產平均報酬率和 T-bills 年平均報酬率相比，就是該金融性資產的風險溢酬率。舉例說，在 1926-1997 年間，美國股票的風險溢酬率平均值為 9.2% (＝13.0%-3.8%)，顯示 1926-1997 這段期間，股票報酬率要比 T-bills 報酬率要高出 3.4 倍之多 (＝13.0%/3.8%)。

縱使持有股票的風險溢酬如此的高，為何仍有不少市場投資者仍願意持有 T-bills？難道 T-bills 持有者不知道持有股票預期報酬率要比持有 T-bills 報酬率要高出 9.2%？這正是第九章所要了解的第一個典型現象。若我們比較【圖 8.1】中股票報酬率和 T-bills 報酬率走勢，可清楚看出股票報酬率的波動幅度較大，由【表 8-1】的統計量亦可知：T-bills 報酬率標準誤 (3.2%) 比同期股票報酬率標準誤 (20.3%) 要小。若以報酬率標準誤衡量風險，則持有 T-bills 的風險顯然較持有股票為小。由實際數字來看，美國股票報酬率的標準誤 (20.3%) 亦較長期公司債報酬率標準誤 (8.7%) 或長期政府公債報酬率標準誤 (9.2%) 為高。由於幾乎不可能會有一家公司所面對的營運風險性質在 35 年期間內不會有任何改變，以標準誤公式算出 36 年內美國股市整體報酬率標準誤參考價值有限。

**表8-1** 1962-1997 美國重要金融性資產報酬率統計性質

| | 股票 | 長期公司債 | 長期政府公債 | 中期政府公債 | T-bills | 物價膨脹率 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 平均報酬率 | 13.0% | 6.1% | 5.6% | 5.4% | 3.8% | 3.2% |
| 風險貼水 | 9.2% | 2.3% | 1.8% | 1.6% | | |
| 標準誤 | 20.3% | 8.7% | 9.2% | 5.7% | 3.2% | 4.5% |

資料來源：Stocks, Bonds, Bills and Inflation：1998 Year book。

表8-2 1989-1994 年美國 10 家上市公司股票報酬率

| 公司名稱 | 標準誤 (%) | 公司名稱 | 標準誤 (%) |
|---|---|---|---|
| AT&T | 21.4 | Exxon | 12.1 |
| Biogen | 51.5 | Ford | 28.0 |
| Bristol-Myers Squibb | 18.6 | G.E | 9.6 |
| Coca-Cola | 21.6 | McDonald's | 21.7 |
| Compaq | 43.5 | Microsoft | 53.6 |

為說明「分散持有可降低風險」第二個典型現象，現選取美國 10 家較著名的公司股票並計算這些公司股票在 1989-1994 期間報酬率的標準誤 (請見【表 8-2】)。【表 8-2】 中，個別公司股票報酬率標準誤大都較美國股市整體報酬率標準誤 (20.3%) 來得高，其中只有 Exxon 石油公司股票報酬率的標準誤 (12.1%) 遠低於美國股市整體報酬率標準誤的平均值，而 G.E. 及 Bristol-Myers Squibb 製藥公司股票報酬率雖低於標準誤平均值，但相差不大。由於美國紐約證券交易所股價指數可視為個別公司股價的加權指數，為何以紐約證券交易所股價指數算出的股市整體報酬率標準誤會低於個別公司股票報酬率標準誤？為何紐約證券交易所股價指數標準誤不是個別公司股票報酬率標準誤的加權平均值？本章將說明只要不同資產報酬率變動方向不完全相同，分散持有就會讓不同資產報酬率變動產生相互抵銷的作用，產生「分散持有可降低風險」的現象。

1962-1997 期間，美國重要金融性資產時間序列可歸納以下三個特性：

- ❖ 不同金融性資產報酬率雖呈現不同程度的波動，但這些資產的報酬率走勢類似。
- ❖ 金融性資產報酬率平均數和報酬率標準誤呈現統計正相關 (positive correlation)。這些金融性資產時間序列呈現「**高風險高報酬**」的典型現象。
- ❖ 個別金融性資產報酬率標準誤大於投資組合報酬率的標準誤。這些時間序列呈現「**分散持有可降低風險**」的典型現象。

## 3 不同資產報酬率間共變異數的計算 ★★

當市場投資者只持有一種資產且該資產報酬率未呈現長期成長趨勢，以該資產過去報酬率實際所算出的報酬率平均數可做為該資產的預期報酬率估計值，而報酬率變異數 (或標準誤) 則可用於衡量持有該資產的風險。當投資者不只持有單一資產，而是持有不同資產所組成的**投資組合**時，以個別資產預期報酬率的加權平均值衡量投資組合報酬率的概念不變，但投資組合報酬率標準誤是否仍是投資組合中個別資產報酬率標準誤的加權平均值？若投資組合的風險仍是個別資產報酬率標準誤的加權平均數，本節將說明此種衡量方法忽略了不同資產報酬率間存在的統計關連。舉例說，兩種資產報酬率若呈反向變動，則同時持有這兩種資產有助於降低投資組合的風險。

本章將進一步推導縱使不同資產間報酬率呈現同向變動，只要是變動方向不完全一致，同時持有這些資產仍有降低投資組合風險的效果。亦即，分散持有可降低風險。由於個別資產間報酬率變動或多或少都有關連，這些共同關連可能是反映國內經濟景氣波動或國際經濟因素的變化，都是市場投資者所關心。當市場投資者持有投資組合而非單一資產時，她所關心的應是變動某一特定資產持有比重對她所持有投資組合的風險有何影響。依此概念，不同資產報酬率共變異數而非個別資產報酬率變異數才是衡量投資組合中個別資產風險較恰當的指標。

景氣波動對不同公司的營運會有不同程度的影響，此種影響會表現在個別公司股票報酬率的波動上。由於公司股票報酬率都受到景氣波動不同程度的影響，它們之間就會存在強弱不同的統計關連。為表現這種關連，統計學係以共變異數 (covariance) 衡量兩個隨機變數變動關連程度。兩個隨機變數 $r_A$ 與 $r_B$ 的共變異數 (以 $\sigma_{AB}$ 或 $\mathrm{Cov}(r_A,r_B)$ 表示) 為

$$\sigma_{AB}=E\left[(r_A-E[r_A])\cdot(r_B-E[r_B])\right],$$

式中 $E[r_A]$ 及 $E[r_B]$ 分別是 $r_A$ 及 $r_B$ 的期望值。假設景氣波動可分為收縮、谷底、擴張以及高峰四種狀態，且每一種狀態發生的機率相同。假設 A 公司

股票報酬率的變化和景氣波動較為接近，B 公司股票報酬率則有較大的差異。在四種景氣狀態下，這兩家公司股票報酬率列於【表 8-3】。

**表8-3** 景氣波動與個別公司股票報酬率的變動

| 不同狀態下股票報酬率 | 公司 A | 公司 B |
|---|---|---|
| 景氣收縮 (i=1) | -20% | 5% |
| 景氣谷底 (i=2) | 10% | 20% |
| 景氣擴張 (i=3) | 30% | -12% |
| 景氣高峰 (i=4) | 50% | 9% |

實際計算時，我們以下式做為共變異數的估計值：

$$\sigma_{AB} = \frac{1}{T-1}\sum_{i=1}^{N}[r_A(i) - \bar{r}_A]\,[r_B(i) - \bar{r}_B]$$

式中 $\bar{r}_A$ 及 $\bar{r}_B$ 為 $r_A(i)$ 及 $r_B(i)$ 的平均數，N 為狀態數目。首先，算出這兩家公司股票的平均報酬率：

$$\overline{r_A} = \frac{-20\% + 10\% + 30\% + 50\%}{4} = 17.5\%$$

$$\overline{r_B} = \frac{5\% + 20\% - 12\% + 9\%}{4} = 5.5\%$$

A 公司和公司 B 股票報酬率標準誤分別是

$$\sigma_A = \sqrt{\sigma_A^2} = \sqrt{8.92\%} = 2.99\% \ ,$$

$$\sigma_B = \sqrt{\sigma_B^2} = \sqrt{1.76\%} = 1.33\% \ 。$$

接下來，我們計算不同狀態下，兩個變數變動的相關程度。舉例說，景氣處於擴張狀態時，A 公司股票報酬率低於其平均值 (17.5%)，而 B 公司股票報酬率則低於其平均值 (5.5%)，表示這兩家公司股票在擴張狀態下，報酬率呈反向變動關係。我們以兩變數離散度乘積衡量這兩個變數變動相關性：$(0.3-0.175)\cdot(-0.12-0.055)$。乘積值為正表示這個狀態下兩變數呈同向變

動關係，乘積值為負表示兩變數呈反向變動關係。假設大部分狀態下，這兩家公司股票報酬率都呈 (同向) 反向變動，則這兩家公司股票報酬率共變異數值應為負 (正) 值。若這兩家公司股票報酬率變動方向並未出現任何特定類型 (即同向變動和反向變動出現數目相近)，由共變異數定義可知，兩變數離散度乘積值有正有負，相互抵消的結果使其平均值接近於零，此時共變異數值應接近零。當然股票報酬率間不出現任何統計相關，不必然表示這兩家公司的股票報酬率共變異數值為零，因為統計抽樣誤差會讓原無任何統計相關的股票報酬率共變異數不等於零。

最後，對不同景氣狀態下，這兩家公司股票報酬率離散度乘積值予以加總，再取其平均數算出共變異數：

$$\sigma_{AB} = Cov(r_A, r_B) = -0.65\%$$

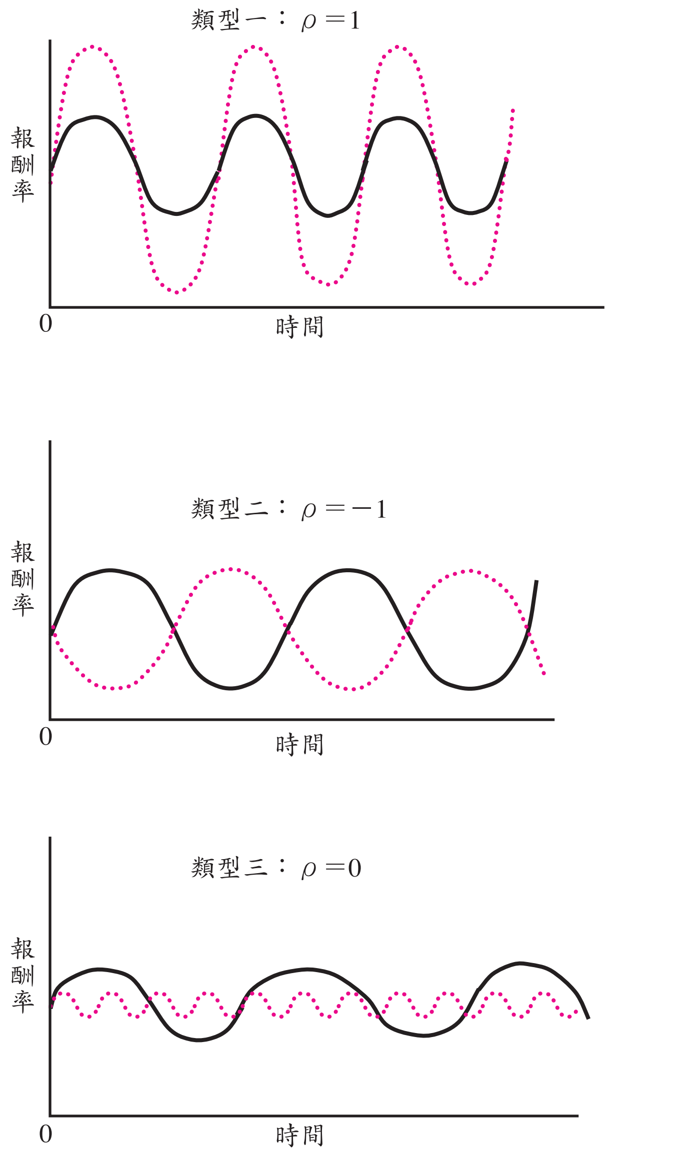
共變異數值為負顯示這兩家公司股票報酬率呈現反向變動關係。

由於不同隨機變數的衡量單位可能不同，造成較難賦予共變異數明確的意涵。為了解決衡量單位不同的問題，另一個與共變異數概念相似，但無衡量單位問題的是相關係數 (correlation coefficient，以 $\rho$ 表示)：

$$\rho \equiv \mathrm{Corr}(r_A, r_B) = \frac{\sigma_{AB}}{\sigma_A \cdot \sigma_B} \text{ 。}$$

依相關係數公式，A 公司與 B 公司股票報酬率相關係數為 $\rho = -0.65/(2.99 \cdot 1.33) = -0.163$。由於相關係數與共變異數中隨機變數排列先後順序不重要。亦即，$r_A$ 和 $r_B$ 的共變異數等於 $r_B$ 和 $r_A$ 的共變異數：$\sigma_{AB} = \sigma_{BA}$。此外，由於 $\sigma_A$ 和 $\sigma_B$ 均為正值，$\rho$ 的正負號與 $\sigma_{AB}$ 正負號一致。若 $\rho$ 值為正，則 $r_A$ 和 $r_B$ 呈同向變動關係。若 $\rho$ 值為負，則 $r_A$ 和 $r_B$ 呈反向變動關係。$\rho = 0$ 表示兩者無關。最後，我們還可證明 $\rho$ 的值最大不會超過 1，最小亦不會小於 -1：$-1 \leq \rho \leq 1$。【圖 8.2】表示隨機變數 $r_A$ 和 $r_B$ 變動關連程度的三種最基本類型。

圖 8.2 隨機變數 $r_A$ 和 $r_B$ 走勢與兩者相關係數



# 4 投資組合的報酬與風險 ★★★

假設市場投資者可利用個別資產報酬率時間序列資料算出這些資產報酬率平均數、標準誤以及不同資產報酬率間共變異數。有了這些估計值，這個投資者應如何選擇最適的投資組合？首先，投資者必須知道可以供她選擇的投資組合有那些？以經濟學術語來說，投資者應先算出投資組合的機會集合。由於並非所有機會集合中的投資組合都是市場投資者選擇的對象。此時，她選擇的投資組合的準則是預期報酬率最高或是報酬率標準誤最低？或是其他篩選準則？本書將以**效率準則** (efficiency criterion) 做為篩選準則。所謂「效率準則」就是在既定風險水準下，投資者選擇預期報酬率最高的投資組合，或在給定預期報酬率水準下，投資者選擇風險最小的投資組合。符合「效率準則」所有投資組合的集合稱為**效率前緣** (efficiency frontier)。由於投資組合係由不同持有比重的個別資產所組成的，故選擇投資組合時，市場投資者須考量到以下兩種關係：

> **效率準則**
> 所謂「效率準則」就是在既定風險水準下，投資者選擇預期報酬率最高的投資組合，或在給定預期報酬率水準下，投資者選擇風險最小的投資組合。

> **效率前緣**
> 符合「效率準則」所有投資組合的集合稱為效率前緣 (efficiency frontier)。

- ❖ 個別資產預期報酬率和投資組合預期報酬率間的關係。
- ❖ 投資組合報酬率標準誤，個別資產報酬率標準誤以及個別資產報酬率間相關係數。

## 4.1 投資組合預期報酬率

假設某市場投資者只考慮持有 A 及 B 兩種資產，其預期報酬率分別是 $\bar{r}_A$ 及 $\bar{r}_B$ ，而持有比重分別是 $\alpha$ 以及 $1-\alpha$ 。這個投資者選擇投資組合前，須先算出投資組合的預期報酬率。以 $r_A$ 和 $r_B$ 分別表示資產 A 與 B 的報酬率，$r_P$ 表示投資組合報酬率： $r_P = \alpha r_A + (1-\alpha) r_B$ 。由投資組合報酬率公式可算出投資組合預期報酬率：

$$\overline{r_P} = \alpha \overline{r_A} + (1-\alpha)\overline{r_B} \quad (1)$$

亦即，投資組合的預期報酬率為個別資產預期報酬率的加權平均值而權數則為個別資產的持有比重。計算投資組合預期報酬率時，我們應用以下的統計公式：

$$E[\alpha X+\beta Y]=\alpha E[X]+\beta E[Y]$$

式中 X 和 Y 為隨機變數，$\alpha$ 和 $\beta$ 為固定常數值。若資產 A 和 B 有相同的預期報酬率，投資組合的預期報酬率等於資產 A 或資產 B 預期報酬率，不受持有比重影響。個別資產既然有相同的預期報酬率，投資者不會因持有方式不同而影響到投資組合的預期報酬率。

**例子：**

朱一手中有現金 100 萬元，打算以 60 萬元購買 A 公司股票，其餘現金用於購買 B 公司股票。依朱一估算，A 公司和 B 公司股票預期報酬率分別是 15% 和 21%。請問朱一持有的投資組合預期報酬率應為多少？

依投資組合預期報酬率公式 (式(1))，投資組合預期報酬率為

$$\bar{r}=0.6\times 15\%+0.4\times 21\%=17.4\%$$

## 4.2 投資組合報酬率變異數

朱一所擁有投資組合的風險又應如何計算？假設朱一以過去五年時間序列資料算出 A 公司和 B 公司股票報酬率標準誤分別是 18.6% 以及 28%。依投資組合預期報酬率公式 (式 (1)) 背後的邏輯，我們或許直覺地認為投資組合報酬率標準誤亦應是個別股票報酬率標準誤的加權平均值：

$$\bar{\sigma}=\alpha\cdot\sigma_A+(1-\alpha)\cdot\sigma_B=0.6\times 18.6\%+0.4\times 28\%=22.4\%\text{。}$$

接下來，將說明除非這兩家公司的股票報酬率變動方向完全一致 (即 $\rho$=1)，不然上式不是計算投資組合報酬率標準誤正確的公式。$\rho$=1 表示 AB 這兩種股票可視為相同資產，此時，分散持有無法降低投資組合的風險，故 $\bar{\sigma}$ 亦可視為投資組合最高可能的風險值。只要投資組合中個別資產變動方向不完全相同，則分散持有就會有降低風險的效果，亦即實際投資組合報酬率標準誤應小於 22.4%。

我們先以矩陣方式說明投資組合報酬率變異數的公式。由於只有兩種資產，2×2 矩陣就可表現個別資產報酬率變動對投資組合報酬率變異數所有可能的影響因素：個別資產報酬率變異數，這兩種資產間報酬率變動相關係數以及持有比重。

| 資產 | A | B |
|---|---|---|
| A | $\alpha^2\sigma_A^2$ | $\alpha(1-\alpha)\sigma_{AB}$ |
| B | $\alpha(1-\alpha)\sigma_{AB}$ | $(1-\alpha)^2\sigma_B^2$ |

矩陣中 $\sigma_A^2$ 和 $\sigma_B^2$ 分別是資產 A 和資產 B 報酬率的變異數，$\sigma_{AB}$ 則是資產 A 報酬率和資產 B 報酬率共變異數。矩陣中對角線左上方元素就是資產 A 的變異數，其係數為 $\alpha^2$ (即持有資產 A 比重的平方值)，對角線右下方元素就是資產 B 報酬率的變異數而係數則為資產 B 持有比重的平方值：$(1-\alpha)^2$。矩陣中對角線上元素表示個別資產報酬率變異數對投資組合報酬率變異數的影響程度。舉例說，假設投資者不持有其中某項資產 ($\alpha=0$ 或 $1-\alpha=0$)，則該資產的風險對投資組合的風險就沒有任何影響。矩陣中非對角線的兩個元素則決定於這兩種資產報酬率的共變異數以及兩種資產持有比重，它們衡量資產 A和資產 B 報酬率變動相關程度對投資組合報酬率變異數的影響。舉例說，假設資產 A 和資產 B 報酬率變動呈反向變動關係 ($\sigma_{AB}<0$)，只要市場投資者同時持有資產 A 和資產 B (即 $1>\alpha>0$)，非對角線上元素變為負值，顯示同時持有這兩種資產有降低投資組合風險的效果。將矩陣中四個要素加在一起就是投資組合報酬率的變異數：

$$\sigma_P^2 = \alpha^2\sigma_A^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{AB} + (1-\alpha)^2\sigma_B^2 。 \tag{2}$$

矩陣中四個元素加總等於投資組合報酬率變異數係應用以下變異數公式：

$$Var(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 Var(X) + 2\alpha\beta Cov(X,Y) + \beta^2 Var(Y)$$

若資產 A 和資產 B 的報酬率多呈反向變動，則這兩種資產報酬率變動有相互抵消作用，造成投資組合報酬率變異數變小，風險亦跟著變小。

式中 X 及 Y 為隨機變數，$\alpha$ 和 $\beta$ 為固定常數值。若 $\sigma_{AB}<0$，$\sigma_{AB}$ 值愈小表示由資產 A 和資產 B 所組成投資組合的變異數就會愈小。這個結果符合一般的直覺想法，若資產 A 和資產 B 的報酬率呈反向變動關係，則這兩種資產報酬率變動有相互抵消作用，造成投資組合報酬率變異數變小，風險亦跟著變小。若資產 A 和資產 B 報酬率共變異數為正 ($\sigma_{AB}>0$)，同時持有這兩種資產是否有助於降低投資組合報酬率變異數？

## 例子：

延續 4.1 小節的例子。假設朱一手頭有 100 萬元，打算將 60 萬元投資 A 司股票，40 萬元投資 B 公司股票。朱一利用過去資料算出 A 公司股票和 B 公司股票報酬率共變異數為 0.488%，則投資組合報酬率變異數為

$$\begin{aligned}\sigma_P^2 &= (0.6)^2 \cdot 0.066875 + 2 \cdot 0.6 \cdot 0.4 \cdot (0.00488) + (0.4)^2 \cdot 0.013225 \\ &= 2.39\%\end{aligned}$$

投資組合報酬率的標準誤 (15.44%) 小於 A 公司股票與 B 公司股票報酬率標準誤加權平均值 (22.4%)。

兩種資產報酬率的相關係數為正，只要不等於一時，分散持有仍有降低投資組合風險的效果。

由這個例子可以看出雖然兩種資產報酬率相關係數為正，只要不等於一時，分散持有仍有降低投資組合風險的效果。為了解分散持有對降低投資組合報酬率變異數的效果，我們先算出 $\rho=1$ 時，投資組合報酬率的標準誤：

$$\sigma_P = \sqrt{\alpha^2\sigma_A^2 + (1-\alpha)^2\sigma_B^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_A \cdot \sigma_B} \tag{3}$$

$$= \sqrt{(\alpha \cdot \sigma_A + (1-\alpha) \cdot \sigma_B)^2} = \overline{\sigma}$$

由式 (3) 可知，只有當資產 A 和資產 B 報酬率變動相關係數等於 1 時，投資組合報酬率標準誤等於資產 A 及資產 B 報酬率標準誤的加權平均值。當 $\rho$ ＜1 時，由式 (2) 可知 $\sigma_P$ 會小於 $\overline{\sigma}$，顯示只要這兩種資產不能視為完全相同的資產，分散持有仍有降低風險的效果：

$$\sigma_p = \sqrt{\alpha^2\sigma_A^2 + (1-\alpha)^2\sigma_B^2 + 2\alpha(1-\alpha)\rho \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B} < \overline{\sigma}$$

換句話說，當資產 A 和資產 B 視為相同的資產時，分散持有與不分散持有效果相同。故 $\overline{\sigma} - \sigma_P$，可用來衡量分散持有的效果。比較 $\sigma_P$ 和 $\overline{\sigma}$ 公式可看出：只要資產 A 和資產 B 間報酬率變動不是完全正相關 ( $\rho$ ＜1)，分散持有仍有降低投資組合風險的效果。相關係數值 ( $\rho$ ) 愈小，分散持有以降低投資組合風險的效果愈強。

## 5 兩種資產情形下，投資組合效率前緣 ★★

本節將說明如何透過持有比重的改變篩選出符合「效率準則」風險性投資組合的機會集合 (即效率前緣)。諾貝爾經濟學獎得主 Harry Markowitz[1] 教授早於 1952 年就提出投資組合選擇 (portfolio selection) 的概念。市場投資者先利用資本市場中各種資產報酬率時間序列資料 (如【表 8-1】) 算出樣本期間個別資產的平均報酬率，報酬率標準誤以及不同資產報酬率相關係數，再利用數學規劃模型，導出可供市場投資者選擇的投資組合機會集合 (opportunity set)。他最大貢獻在於利用上述統計量發展出一套「平均數－共變異數分析」(mean-variance analysis) 推導出投資組合的效率前緣。

1. H. M. Markowitz, "Portfolio Selection," Journal of Finance 7 (March 1952), pp. 77-91.

為使讀者對推導過程有較清楚的了解，先以兩種資產為例說明。為方便說明，假設 $\bar{r}_A > \bar{r}_B$ 與 $\sigma_A > \sigma_B$，【圖 8.3】中點 A 和點 B 就是標明這兩種資產預期報酬率及報酬率標準誤的座標點。

假設 $\rho = 1$，式 (3) 就是投資組合報酬率標準誤的公式，而式 (1) 則為投資組合預期報酬率公式。由這兩個公式可看出：不同持有比重 (不同 $\alpha$ 值)，就可導出【圖8.3】中不同的座標點。推導效率前緣時，關注的重點在於投資組合預期報酬率和風險間的邊際抵換率 (marginal trade-off rate)，邊際抵換率係表現市場投資者對不同投資組合風險所賦予的價值 (邊際抵換率就是增加投資組合風險時，市場投資者會要求多少額外預期報酬率以補償所增加的風險)。求算 $\rho = 1$ 情形下，邊際抵換率，必須先利用式 (1) 及式 (3) 分別評量變動持有比重對投資組合預期報酬率及風險的影響。市場投資者改變資產 A 持有比重對投資組合報酬率標準誤的影響為

邊際抵換率就是增加投資組合風險時，投資者會要求多少額外預期報酬率以補償所增加的風險

$$\frac{d\sigma_P}{d\alpha} = \sigma_A - \sigma_B$$

而市場投資者改變資產 A 持有比重對投資組合預期報酬率的影響為

$$\frac{d\bar{r}_P}{d\alpha} = \bar{r}_A - \bar{r}_B \tag{4}$$

算出改變資產 A 持有比重對投資組合預期報酬率及標準誤的影響後，可進一步算出當 $\rho = 1$ 時，投資組合預期報酬率和標準誤間的邊際抵換率：

$$\frac{d\bar{r}_P}{d\sigma_P} = \frac{\bar{r}_A - \bar{r}_B}{\sigma_A - \sigma_B}$$

當 $\rho = 1$ 時，上述邊際抵換率中並未出現 $\alpha$ 的變數，故投資組合預期報酬率與風險間邊際抵換率不受持有比重的影響，顯示此時投資組合風險內涵不因持有比重改變而有影響。理由很簡單：既然這兩種資產可視為相同資產，分散持有當然不會改變投資組合的風險，投資組合預期報酬率與風險間邊際

抵換率自不會受個別資產持有比重不同而有所改變。【圖 8.3】中直線 AB 就是 $\rho=1$ 情形下，投資組合的機會集合。由於機會集合上所有的投資組合皆符合「效率準則」，故線 AB 亦為 $\rho=1$ 時的**效率前緣**。

接下來，再看另一個極端的例子：$\rho=-1$。由式 (2) 可算出此時投資組合報酬率的標準誤：

$$\sigma_P=\sqrt{\alpha^2\sigma_A^2-2\alpha(1-\alpha)\sigma_A\sigma_B+(1-\alpha)^2\sigma_B^2}$$

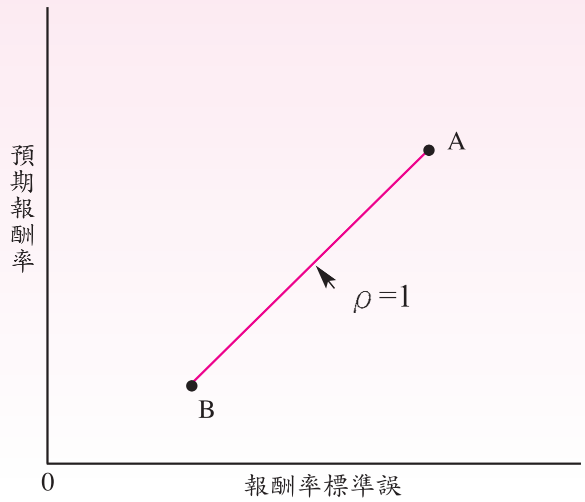
由於根號內的值可正可負，所以須先找出個別資產持有比重的臨界值 (即對應 $\sigma_P=0$ 的資產 A 持有比重)。令 $\sigma_P=0$，由上式可得出

$$[\alpha\sigma_A-(1-\alpha)\sigma_B]^2=0$$

經過簡單計算可得 $\alpha$ 的臨界值 (以 $\alpha^*$ 表示)：

$$\alpha^*=\frac{\sigma_B}{\sigma_A+\sigma_B}$$

**圖 8.3**　$\rho=1$ 時，投資組合效率前緣



也就是說，當資產 A 持有比重為 $\alpha^*$ 時，投資組合報酬率標準誤等於 0。換句話說，持有這種投資組合不會有任何風險。算出臨界值後，投資組合報酬率標準誤的公式為

$$\sigma_P = \begin{cases} \alpha\sigma_A - (1-\alpha)\sigma_B \text{，} & \alpha \geq \alpha^* \\ (1-\alpha)\sigma_B - \alpha\sigma_A \text{，} & \alpha < \alpha^* \end{cases}$$

至於變動資產A持有比重，對投資組合預期報酬率的影響仍由式 (4) 決定不受 $\rho$ 值的影響。所以，當 $\rho = -1$ 時，只要算出變動資產 A 持有比重對投資組合報酬率標準誤的影響，就可算出投資組合報酬率與風險的邊際抵換率：

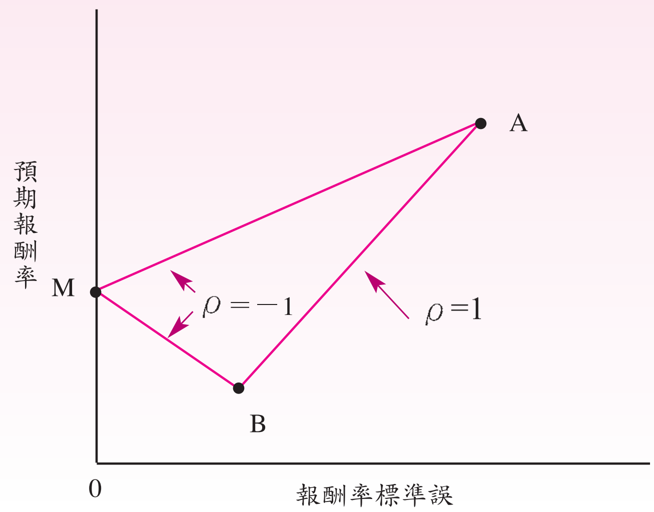
$$\frac{d\overline{r}_P}{d\sigma_P} = \begin{cases} \dfrac{\overline{r}_A - \overline{r}_B}{\sigma_A + \sigma_B} \text{，} & \alpha \geq \alpha^* \\ -\dfrac{\overline{r}_A - \overline{r}_B}{\sigma_A + \sigma_B} \text{，} & \alpha < \alpha^* \end{cases}$$

【圖 8.4】中折線 AMB 為 $\rho = -1$ 時，投資組合的機會集合。由於直線 MB 上的投資組合不滿足「效率準則」，故只有直線 AM 上投資組合的機會集合才是 $\rho = -1$ 時，投資組合的**效率前緣**。

當 $\alpha \geqq \alpha^*$ (即直線 AM 上的投資組合)，增加資產 B 的持有比重或減少資產 A 的持有比重，投資組合的預期報酬率和風險會同時下降，但邊際抵換率並不會因資產持有比重不同而有改變。一旦持有資產 A 的比重降至 $\alpha^*$ 以下 ($\alpha < \alpha^*$) 時，增加資產 B 持有比重或減少資產 A 持有比重，導致投資組合的風險上升而預期報酬率則同時下降。由於線 MB 上投資組合不符合「效率準則」，故市場投資者不會將線 MB 上投資組合納為其選擇對象。

由於個別資產間相關係數幾乎都不會等於 1 或 −1，接下來將探討兩種資產報酬率相關係數介於 −1 及 1 之間時，改變資產持有比重對投資組合預期報酬率及風險的影響。變動資產 A 持有比重對投資組合預期報酬率與風

圖 8.4 $\rho$ =-1 時，線 AM 為投資組合的效率前緣

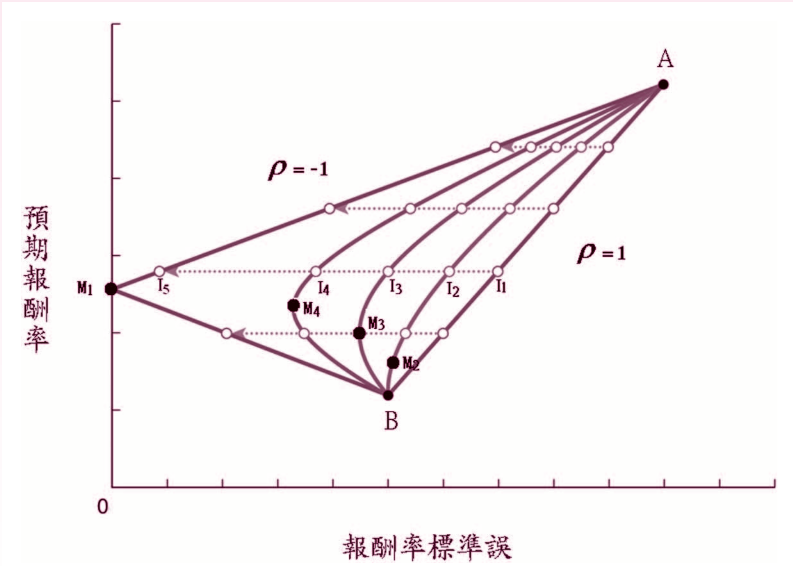



險的影響可由式 (1) 及式 (2) 看出。由於兩種資產報酬率相關係數不等於 1 或 −1，投資組合報酬率標準誤公式就不能進一步化簡。且投資組合預期報酬率和風險間邊際抵換率就不再是固定常數值，邊際抵換率會隨持有比重變動而改變。【圖 8.5】顯示其中幾種可能的情況。

當 $\rho$ =1 時，由於兩種資產可視為相同資產，此時分散持有對降低投資組合風險沒有任何效果。

【圖 8.5】中，投資組合機會集合 (如曲線 $AM_2B$ 或曲線 $AM_3B$) 有兩個特質值得一提。首先，只要 $\rho<1$ 無須 $\rho$ 一定為負，分散持有就有降低投資組合風險的效果。現以 $\rho=1$ 做為比較基準 (【圖 8.5】中點 $I_1$)，假設資產 A 和資產 B 報酬率相關係數 ( $\rho$ ) 為 0.5，對應的投資組合機會集合為曲線 $AM_2B$。比較點 $I_1$ 和點 $I_2$ 可知：點 $I_1$ 和點 $I_2$ 有相同的預期報酬率，但點 $I_2$ 投資組合風險較低。$I_2$-$I_1$ 所衡量的就是當 $\rho$ =0.5 時，分散持有對降低投資組合風險的效果。這個效果隨著資產 A 與資產 B 報酬率相關係數值愈小而愈大 (比較點 $I_1$ 和 $I_5$ 即知)。其次，【圖 8.5】中 $M_1$，$M_2$，$M_3$ 和 $M_4$ 四點 (以 M 點通稱) 皆為在不同相關係數值情形下，變異數最小的投資組合。若投資組合落在 M 點，此時市場投資者再增加對資產 B 的持有將導致投資組合通過 M 點而落在 M 點和 B 點之間；此時增加持有資產 B 的比重，不僅讓投資組合預期報酬率下降，亦讓投資組合風險增加，故曲線 MB 上的投資組合均不符合「效率準則」。

**圖 8.5** 不同 $\rho$ 值情況下，投資組合效率前緣




依「效率準則」，面對相同預期報酬率的投資組合，市場投資者會選擇風險最小的投資組合或面對相同風險水準的投資組合，市場投資者應選擇預期報酬率最大的投資組合。市場投資者可在投資組合機會集合中篩選出符合「效率準則」的投資組合，這些投資組合的集合稱為**效率前緣**。舉例說，【圖 8.5】中曲線 $AM_2B$ 為資產 A 和資產 B 所組成的投資組合機會集合，依「效率準則」，投資組合效率前緣應為曲線 $AM_2$，至於曲線 $M_2B$ 上的投資組合不滿足「效率準則」。至於市場投資者會在效率前緣上選擇何種投資組合需視其偏好。假如她較能忍受風險，她的選擇將愈接近點 A 的投資組合，假如她較不能忍受風險，她的選擇會較接近最小變異數的投資組合 (點 M)。依此概念，【圖 8.5】中曲線 $AM_2$，曲線 $AM_3$ 或曲線 $AM_4$ 皆為不同相關係數下，兩種資產所組成的效率前緣。

## 6 多種資產情形下，投資組合的效率前緣 ★★★

第 5 節推導兩種資產情形下，投資組合的效率前緣。接著，我們再以矩陣方式計算多種資產情形下，投資組合報酬率變異數。假設個別資產數目為 N，$X_j$ 為資產 j 的持有比重，且 $\sum_{j=1}^{N} X_j = 1$。設 $\sigma_{ii}$ 為資產 $i$ 報酬率變異數，而 $\sigma_{ij}$ 為資產 $i$ 和資產 $j$ 報酬率共變異數 ($i \neq j$)。【表 8-4】顯示 N 種資產情形下投資組合變異數矩陣。N×N 矩陣中的各元素表示 N 種個別資產持有比重，個別資產報酬率變異數以及不同資產間報酬率共變異數對投資組合風險的影響方式與程度。首先，矩陣中的對角線上元素為個別資產報酬率變數對投資組合報酬率變異數的影響，影響程度決定於個別資產的持有比重。舉例說，矩陣第 3 行第 3 列元素所表現的是第 3 種資產報酬率變異數對投資組合風險的影響，資產 3 報酬率變異數為 $\sigma_3^2$，而 $X_3^2$ 則表現持有第 3 種資產的比重對投資組合風險的影響。其次，非對角線上的元素表現不同資產間報酬率變動相關程度對投資組合報酬率變異數的影響。舉例說，矩陣中第 1 行第 2 列的元素為 $X_1X_2\sigma_{12}$，其中 $\sigma_{12}$ 為資產 1 和資產 2 報酬率變動的共變異數，$X_1$ 及 $X_2$ 則分別是資產 1 與資產 2 持有比重。非對角線上的元素呈對稱狀態，第 i 行第 j 列的元素等於第 j 行第 i 列的元素 ($X_iX_j\sigma_{ij} = X_jX_i\sigma_{ji}$)。就如同兩種資產情形一樣，N×N 矩陣內所有元素加總，就是 N 種資產情形下，投資組合報酬率的變異數：

**表8-4** N×N 變異數矩陣表

| 資產 | 1 | 2 | 3 | … | N |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $X_1^2\sigma_{11}$ | $X_1X_2\sigma_{12}$ | $X_1X_3\sigma_{12}$ | … | $X_1X_N\sigma_{1N}$ |
| 2 | $X_1X_2\sigma_{12}$ | $X_2^2\sigma_{22}$ | | | $X_2X_N\sigma_{2N}$ |
| 3 | $X_3X_1\sigma_{13}$ | $X_3X_2\sigma_{23}$ | $X_3^2\sigma_{33}$ | … | $X_3X_N\sigma_{3N}$ |
| · | · | · | · | | · |
| · | · | · | · | | · |
| · | · | · | · | | · |
| N | $X_NX_1\sigma_{1N}$ | $X_NX_2\sigma_{2N}$ | $X_NX_3\sigma_{3N}$ | … | $X_N^2\sigma_{NN}$ |

$$
\begin{aligned}
\sigma_P^2 &= X_1X_2\sigma_1^2 + X_1X_2\sigma_{12} + \cdots + X_1X_N\sigma_{1N} + X_2X_1\sigma_{12} + \cdots + X_NX_N\sigma_N^2 \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i X_j \sigma_{ij}
\end{aligned}
$$

投資組合變異數矩陣對角線上的元素個數等於個別資產的數目 (N)，而非對角線上的元素個數則為 N．(N－1) (＝$N^2$－N)。所以，當資產數目 (N) 增加時，非對角線上的元素個數增加速度會較對角線上的個數增加速度為快。

假設市場投資者考慮持有由 N 種個別資產所組成的投資組合。此 N 種資產的投資組合預期報酬率分別以 $\overline{r_i}$ 表示，i＝1, 2, 3, ..., N。由於市場投資者選擇投資組合的對象是效率前緣上的投資組合，Markowitz 教授證明投資組合的效率前緣可用以下兩個數學規劃模型算出且所得結果相同。第一個模型是在給定的風險水準 ($\overline{\sigma_P^2}$) 下，找出預期報酬率 ($\overline{r_P}$) 最大投資組合的個別資產持有比重 ($X_1$, $X_2$, ..., $X_N$)：

$$
\begin{aligned}
&\text{maximize} \quad \overline{r_P} = X_1\overline{r_1} + \cdots + X_N\overline{r_N} \\
&\text{subject to} \quad \overline{\sigma_P^2} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_iX_j\sigma_{ij} \quad \text{and} \quad X_1 + X_2 + \cdots + X_N = 1
\end{aligned}
$$

若 N＝2，$\overline{\sigma_P^2}$ 和 $\overline{r_P}$ 的公式就化簡為式 (1) 和式 (2)。持續變動給定的風險水準，就可導出投資組合的效率前緣。第二個數學規劃模型則是在給定預期報酬率 ($\overline{r_P}$) 水準下，找出 $\sigma_p^2$ 最小投資組合的個別資產持有比重 ($X_1$, $X_2$, ..., $X_N$)：

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad \sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_iX_j\sigma_{ij} \\
&\text{subject to} \quad \overline{r_P} = X_1\overline{r_1} + \cdots + X_N\overline{r_N} \quad \text{and} \quad X_1 + X_2 + \cdots + X_N = 1
\end{aligned}
$$

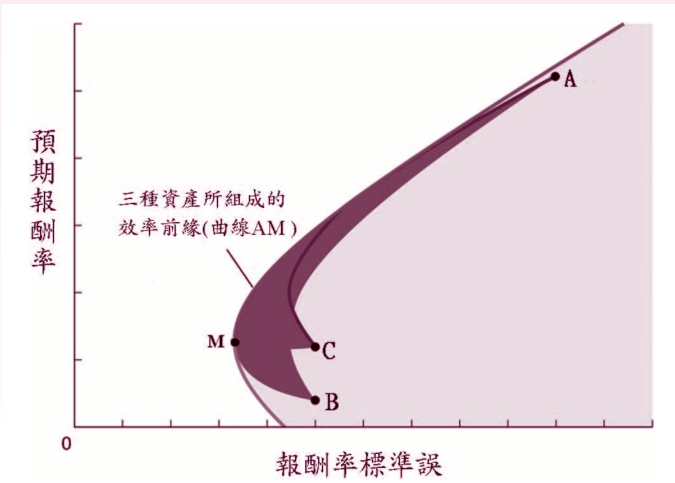
持續變動投資組合的預期報酬率 ($\overline{r_P}$) 亦可導出投資組合的效率前緣。最後，Markowitz 教授證明這兩種模型所導出的效率前緣完全相同。

【圖 8.6】中陰影區域就是由三種資產所組成投資組合的機會集合。顯然，陰影區域內有無數種可能的投資組合。陰影區域既然包含所有可能的投

資組合，所以不可能有其他的投資組合會落在陰影區域之外。【圖 8.6】中深色陰影區域 (區域 AMBC) 就是三種個別資產可供選擇且不允許市場投資者放空 (short sales) 情形下，市場投資者所面對的投資組合機會集合；若允許市場投資者放空這三種資產，則淺色陰影區域為市場投資者所面對的投資組合機會集合。[2]

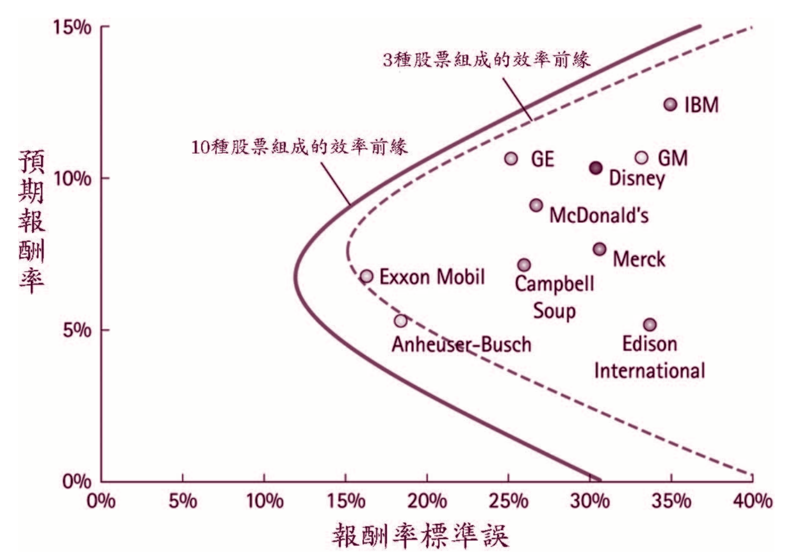
由三種資產所形成的投資組合機會集合 (【圖 8.6】中區域 AMBC) 和兩種資產所形成的投資組合機會集合 (如【圖 8.5】中曲線 $AM_2B$) 型態並不相同，到底投資組合的效率前緣是否會因資產數目不同而有顯著的差異？依「效率準則」，在三種資產可供選擇且不允許市場投資者放空情形下，投資組合的效率前緣減縮為曲線 AM。效率前緣上的任何點和深色陰影區域機會集合中投資組合相比較，可發現有相同風險水準 (預期報酬率) 的兩個投資組合，效率前緣上的投資組合有較高 (較低) 的預期報酬率 (風險)。由此可知，多種資產情形下，投資組合的機會集合和兩種資產所形成的機會集合型態雖不相同，但兩者所構成的效率前緣型態卻相當類似。

**圖 8.6** 三種資產所組成投資組合的機會集合與效率前緣




2. 所謂「放空」係指市場交易者預期某公司股價將會下跌而向股票持有者借入手中所持有的股票在市場拋售，再於預先約定的未來某一時點於市場購回股票還給原持有者。

圖 8.7




當可供選擇的資產由三種增加為四種，由選擇對象變多，四種資產所構成的效率前緣當然要比三種資產所構成的效率前緣更有效率。只要可供選擇的資產持續增加，新的投資機會允許更分散的持有，自然所構成的效率前緣會更有效率。

【圖8.7】係以美國 10 家公司 1996-2004 期間月股票報酬率所算出的效率前緣，比較只有三家公司 (Exxon Mobile, GE 及 IBM) 所算出的效率前緣，就可發現 10 家公司股票所算出效率前緣 (實線) 已由 3 家公司股票所算出效率前緣 (虛線) 向左移動，表示更多的選擇會讓投資組合更具效率。縱使後來新加進來的股票 (如：Anheuser-Busch啤酒公司) 較原來 3 家 公司股票所算出效率前緣上的投資組合效率較差，由於更多的機會讓市場投資者更能分散持有，而分散持有則有助於新的投資組合提升效率。所以，市場投資者應盡量讓各種資產納入資產選擇對象以追求最符合「效率準則」的效率前緣。

為說明多種資產情形下，分散持有如何降低投資組合的風險，先對 N×N 變異數矩陣做三個簡化假設：

- ❖ 所有個別資產報酬率都有相同的變異數：$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\cdots=\sigma_N^2=\sigma^2$
- ❖ 不同個別資產間報酬率共變異數完全相同：$\sigma_{12}=\sigma_{13}=\cdots=\sigma_{N-1,N}=Cov$
- ❖ 所有個別資產的持有比重完全相同：$X_1=X_2=\cdots=X_N=1/N$

在這三個假設下，N×N 變異數矩陣就變成

| 資產 | 1 | 2 | 3 | … | N |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\left(\frac{1}{N}\right)^2\sigma^2$ | $\left(\frac{1}{N}\right)^2 Cov$ | $\left(\frac{1}{N}\right)^2 Cov$ | … | $\left(\frac{1}{N}\right)^2 Cov$ |
| 2 | $\left(\frac{1}{N}\right)^2 Cov$ | $\left(\frac{1}{N}\right)^2\sigma^2$ | | … | $\left(\frac{1}{N}\right)^2 Cov$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | | ⋮ |
| N | $\left(\frac{1}{N}\right)^2 Cov$ | $\left(\frac{1}{N}\right)^2 Cov$ | … | … | $\left(\frac{1}{N}\right)^2\sigma^2$ |

N×N 矩陣中對角線上的 N 個元素完全相同且非對角線上的 $N^2$-N 個元素亦完全相同。投資組合報酬率變異數為上述 N×N 矩陣中各元素的加總：

$$
\begin{aligned}
\sigma_P^2 &= N\left(\frac{1}{N}\right)^2\sigma^2 + N(N-1)\left(\frac{1}{N}\right)^2 Cov \\
&= \frac{1}{N}\sigma^2 + \left(1-\frac{1}{N}\right)Cov
\end{aligned}
\tag{5}
$$

式中第二個等號右邊第一項是衡量個別資產報酬率變異數平均數對投資組合報酬率變異數的影響，第二項則是衡量不同資產間報酬率共變異數平均數對投資組合報酬率變異數的影響。在上述三個簡化假設下，$\sigma_P^2$ 是 $\sigma^2$ 和 $Cov$ 的加權平均值，其權數分別是 1/N 和 (1－1/N)。當持有的個別資產數目愈來愈多 (N 值愈大) 時，由式 (5) 可知投資組合風險將會變為

$$\lim_{N \to \infty} \sigma_P^2 = Cov.$$

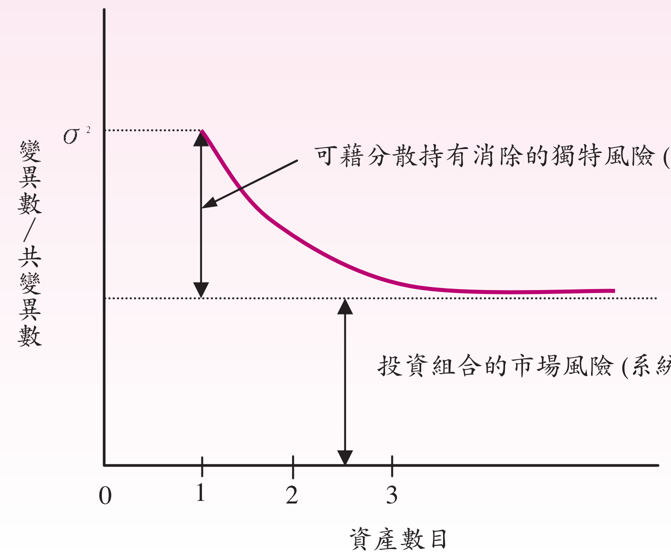
這個結果顯示當資產分散持有愈徹底，個別資產的風險對投資組合風險的影響愈小，此時投資組合風險則決定於個別資產間報酬率共變異數的平均數 (Cov)。換句話說，允許市場投資者充分分散持有各種資產時，不同資產間報酬率共變異數平均數變成決定投資組合風險的最重要變數，而此共變異數則反映不同資產間報酬率變動共同的部分。這個結果就是本章一開始所強調的：不考慮分散持有情形下，個別資產的風險可以用該資產的報酬率變異數 (或標準誤) 來衡量。一旦允許充分分散持有時，有一部分個別資產風險將因分散持有而消除，此時個別資產報酬率變異數 (或標準誤) 就不再是衡量個別資產良好的指標。縱使未修習過財務管理的人亦經常提到「分散持有降低風險」或「不應將所有的雞蛋放在同一個籃子內」。這個例子正說明分散持有對投資組合風險的效果。個別資產的部份風險可藉完全分散持有而消除，但資產間報酬率變動的共變異數卻無法透過分散持有而完全消除。故允許充分分散持有時，投資組合中個別資產風險應改以共變異數來衡量。

> 個別資產的風險可藉完全分散持有而消除，但資產間報酬率變動的共變異數卻無法透過分散持有而完全消除。故允許充份分散持有時，投資組合中個別資產風險應改以共變異數來衡量。

為何分散持有會消除部分風險？設想宋先生帶了 100 萬美元到美國拉斯維加斯參與賭局。若宋先生將這 100 萬美元完全投注在一次賭局中，則這次賭局勝負風險將變得很大，宋先生贏了固然可贏得 200 萬美元，但輸了宋先生一次就血本無歸。若宋先生改變策略將 100 萬美元分 1000 次下注，每次下注 1000 元，依機率來看，宋先生有 500 次的贏面。依照這種賭法，宋先生大概可以拿回原先下注的 1000 萬美元。換句話說，宋先生下注次數愈多，賭局的風險就愈小。

當可持有的資產只有一種時，由式 (5) 可知報酬率變異數等於該資產報酬率的變異數。當可持有資產數目增加時，就如同【圖 8.8】所示，投資組合的風險會跟著下降，但投資組合的風險仍不可能完全消除。就算可持有資產數目達到無窮大，投資組合風險亦不可能小於 Cov。

**圖 8.8** 獨特風險會隨分散持有而消除




由於投資組合變異數會隨持有資產數目增加而下降且最後會非常接近 Cov，表示每增加一種資產的持有後，投資組合的風險會跟著下降，但增加持有種類對降低風險的效果愈來愈小。在沒有任何交易成本情形下，市場投資者應藉著分散持有降低風險，但最終效果最多也只是讓投資組合的風險下降至 Cov 的水準。在實際交易中，增加持有資產的數目都需要成本。縱使考慮到這些成本，經精確估算後，大約持有 30 種資產就可達到最佳分散持有狀態。由於個別資產報酬率變異數 $\sigma^2$ 大於 Cov，個別資產報酬率的變異數 (總風險) 可拆解成兩部份：

$$\begin{bmatrix}\sigma^2 \\ \text{個別資產} \\ \text{總風險}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{Cov} \\ \text{系統性} \\ \text{風險}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\sigma^2 - \text{Cov} \\ \text{非系統性} \\ \text{風險}\end{bmatrix}$$

上式中**系統性風險** (systematic risk) 係指完全分散持有後投資組合的風險 (Cov)，這部分的風險又被稱為**市場風險** (market risk)，市場風險反映的是一切足以影響所有資產報酬率的整體因素，如：油價變動或

> 系統性風險 (systematic risk) 則是指完全分散持有後投資組合的風險 (Cov)，這部分的風險又被稱為系統性風險為市場風險 (market risk)

$\sigma^2 - \text{Cov}$ 則是可藉分散持有所消除的風險，稱為非系統性風險 (unsystematic risk) 或獨特風險 (unique risk)

景氣波動。至於 $\sigma^2 - \text{Cov}$ 則是可藉分散持有所消除的風險，稱為**非系統性風險** (unsystematic risk) 或**獨特風險** (unique risk)，這部分風險主要反映的是那些會影響到個別資產報酬率的個別因素 (或稱廠商特定因素)。

任何可充分分散持有的市場投資者不會關心個別資產獨特風險的大小，因為她知道這部分的風險可透過分散持有而消除，所以當她考慮是否持有某項資產時，她的考量將在於這個選擇對她所擁有投資組合風險的影響。也就是說，既然她知道個別資產的風險只有一部分會透過分散持有而消除，所以，她真正關心的應是個別資產中無法透過分散持有所消除的部分。

# 習　題

## 選擇題：

1. 股票 A 的投資報酬率變異數 0.09，市場報酬率變異數是 0.16，股票 A 和市場共變數是 0.108，則其相關係數是多少？ (A) 0.7 (B) 0.8 (C) 0.9 (D) 1.0。【92 年文化國貿所】
2. 保守型的資產分配策略是指： (A) 投資在價格合理的證券上 (B) 對投資組合中各項資產維持約略相同的投資比例而不因時間有所改變 (C) 變動投資組合中各項資產之投資比例以保持與市場之連動性 (D) 不買賣投資組合中之證券 (E) 以上全非。 【90 年臺大財金所】
3. 在平均值對標準差 (mean-standard deviation) 的圖形中，連接無風險利率與最適投資組合 (the optimal risky portfolio) 的直線叫作： (A) 證券市場線 (the security market line) (B) 資本配置線 (the capital allocation line) (C) 無異曲線 (the indifference curve) (D) 投資者效用線 (the investor's utility line) (E) 資本特徵線 (capital characteristic line)。 【94 年臺大財金所】
4. 由於總統槍擊事件而引起的股市下跌屬於何種風險？ (A) 財務風險 (B) 企業風險 (C) 市場風險 (D) 個別風險 (E) 總風險。 【93 年中山財管所】
5. 假定倫飛電腦決定推出筆記型電腦後，發生了下列事件：A. 市場利率較前上升 1%；B. 政府對中國大陸實施戒急用忍政策，兩岸交流已趨緩；C. 公司總經理忽然離職他就；D. 該新式筆記型電腦發現瑕疵，必須延後一個月上市；E. 宏碁電腦公司宣布，即將推出一種功能更強大的筆記型電腦。上述那些事件屬於系統風險？ (A) BE (B) CD (C) AB (D) AC。 【92 年中原國貿所】
6. 很久很久以前，在森林裡住了七個小矮人。分別是 Doc，Grumpy，Happy，Sleepy，Sneezy，Dopey 及 Bashful，他們各自擁有翡翠，綠寶石，紅寶石，水晶，白玉，瑪瑙，紫水晶礦藏，並發行股票。假設 Doc 翡翠股票報酬率和 Happy 紅寶石股票報酬率因東西文化之差異，相關係數為－1，則下述何者為真？ (A) 在報酬變異 Mean-Variance 分析中，兩者之投資組合為一折線 (B) 在報酬變異 Mean-Variance 分析中，可找出一個無風險投資組合 (C) 此一無風險投資組合之報酬率恆為正 (D) 投資組合報酬率風險為非線性。 【92 年臺大財金所】

7. 下列何者為非：(A) 在可向資本市場借貸之情況下，投資組合某一個別資產之權數可大於 1 (B) 任何變數與常數之共變數為 0 (C) 在效率前緣右上方的投資組合都是不值得投資的，稱為無效率的投資組合 (D) 可在多角化過程中被分散掉的風險稱為非系統風險 (D) 以上答案皆正確。【89 年朝陽財金所】
8. 下列敘述何者不正確？ (A) 資本市場線的斜率永遠為正 (B) 資本市場線是最佳的一條資本分配線 (C) 所有的證券都必須落在資本市場線上 (D) 對一個充分分散風險的投資組合而言，其非系統風險可忽略不計 (E) 根據資本資產訂價理論，合理評價的證券其詹森係數永遠為零。【90 年臺大財金所】
9. 下列敘述何者為真：(A) 當市場風險變大，夏普指數會變大 (B) 當基金與大盤報酬之相關性變大，其川納指數會變大 (C) 當基金與大盤報酬之相關性變大，其夏普指數會變大 (D) 以上皆非。【93 年銘傳財金所】
10. 下列有關基金績效評估敘述，何者有誤？ (A) Treynor 指標使用標準差來當風險指標，因此 Treynor 指標不僅衡量經理人之績效，也衡量其是否進行風險分散 (B) 針對已經完全風險分散的投資組合間作評估，使用 Treynor、Sharpe 和 Jensen 指標三種指標所得的排名相差不大 (C) 一個風險分散不完整的投資組合可能仍得到 Treynor 和 Jensen 指標排名，但會得到不好的 Sharpe 指標排名 (D) Sharpe 指標奠定基於投資人對資本市場線斜率最大化之假設 (E) 計算 Jensen's 指標，我們需要每期更新無風險利率、市場報酬以及投資組合之報酬。【91 年臺大財金所】
11. 假設 A、B 兩種資產的相關係數為 0，其中 A 的變異係數為 3，報酬率為 50%，B 的變異數為 0.09。請計算：A 與 B 的共變異數。【95 年銘傳財金、風管所】
12. 股票的報酬率為 7%、4%、11%、9%，請問其報酬率之樣本變異數為：(A) 0.00875 (B) 0.008917 (C) 0.000875 (D) 0.00089167。【90 業務員】
13. 在景氣蕭條時期，利率會走跌，慢慢地投資意願會增加，此時股價會開始上揚，反之，亦然。此種影響股價的方式屬於：(A) 系統風險 (B) 公司風險 (C) 事業風險 (D) 產業風險。【94 業務員】
14. 效率前緣上的投資組合，有下列何種特性？ (A) 既定風險下，報酬率最大化之組合 (B) 既定報酬率下，風險最大化之組合 (C) 風險、報酬率皆最大化之組合 (D) 風險、報酬率皆最小化之組合。【90 業務員】

15. 下列有關資本市場線的敘述，何者有誤： (A) 為效率前緣 (B) 斜率為正 (C) 投資人效用無異曲線與資本市場線的相切之處即為市場投資組合 (D) 在市場投資組合與無風險資產之間的投資組合，其投資於市場投資組合之權重介於 0，1 之間。 【92 業務員】
16. 下列敘述何者最能解釋資本市場線？ (A) 資本市場線市效率投資組合的訂價模式 (B) 資本市場線是資本資金的供給曲線 (C) 資本市場線是殖利率曲線 (D) 以上皆非。 【90 業務員】
17. 依資本市場線，風險規避程度很高的投資人，為了效用極大化，會採取下列何種策略？ (A) 不進行借貸行為，而將本身自有資金全部購買市場投資組合 (B) 會將資金借給他人，再將剩餘的資金購買市場投資組合 (C) 會向他人借入資金，再將全部的資金全部購買市場投資組合 (D) 僅投資於共同基金。 【91 業務員】
18. 下列何者正確描述非系統風險？ (A) 只存在於小公司 (B) 只存在於成長性公司 (C) 可被分散掉 (D) 通貨膨脹率是重要決定因素。 【95 業務員】
19. 下列何者不屬於非系統風險？ (A) 新產品開發的成敗 (B) 合約的爭取 (C) 罷工 (D) 高利率。 【95 業務員】
20. 小明投資聯電股票可獲利 20% 與－10% 的機會分別為 1/3、2/3，請問該期望報酬率為？ (A) 20% (B) －10% (C) 5% (D) 0%。 【95 業務員】
21. 若甲公司股票在明年之可能報酬率分別為 20%、30%，而其機率分別為 0.4、0.6，則此甲股票在明年之期望報酬率為： (A) 24% (B) 25% (C) 26% (D) 27%。 【94 業務員】
22. 如果投資人一定要建立風險性資產的投資部位，則市場風險是一種： (A) 可以完全分散的風險 (B) 非系統風險 (C) 無法完全規避的風險 (D) 以上皆非。【95 年臺大財金所】
23. 投資組合之風險程度主要受： (A) 證券價格平均值 (B) 證券報酬率的平均數 (C) 證券報酬率的相關係數 (D) 加權指數之平均值受所影響。 【95 年銘傳大學財金所與風管所甲組】
24. NTU 公司自現在起一年內的預期股價有如下表的機率分配：

| 狀態 | 機率 | 價格 |
|---|---|---|
| 1 | 0.25 | $50 |
| 2 | 0.40 | $60 |
| 3 | 0.35 | $70 |

若你今天以每股 $55 買進 NTU 的股票，而一年內你將可配發每股 $4 的股利，則這一年預期的投資報酬率為何？ (A) 7.27% (B) 9.09% (C) 10.91% (D) 16.36% (E) 18.18%。 【94 年台灣大學財金所甲、丙組】

## 問答題：

1. 下表列出台灣、東京和香港三地股票市場在 20X1 年的月報酬率 (以%表示)，請根據這些數字回答以下問題。

| 月份 | 台灣 | 東京 | 香港 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.73 | 13.19 | -3.38 |
| 2 | -11.46 | 0.15 | -9.37 |
| 3 | -3.06 | -4.20 | -13.26 |
| 4 | 9.30 | 2.57 | -0.71 |
| 5 | 2.69 | 4.94 | 6.55 |
| 6 | 0.70 | -0.55 | -8.32 |
| 7 | 13.27 | -2.15 | -8.27 |
| 8 | 4.29 | 0.18 | 4.71 |
| 9 | 1.18 | -3.87 | -4.11 |
| 10 | -7.96 | 0.49 | 1.31 |
| 11 | -2.49 | -4.06 | -12.23 |
| 12 | 11.96 | 2.54 | -3.25 |

(a) 計算台灣、東京和香港三個股票市場在 20X1 年報酬率的平均數、標準誤和相關係數。

(b) 如果投資組合只包含台灣跟東京二地股票的股票，請計算投資組合的效率前緣。比起只能投資其中一地的股票，此投資組合是否可以降低風險？

(c) 如果投資組合可以包含台灣、東京和香港三地股票，請計算投資組合的效率前緣。投資人是否可能選擇只投資一地的股票？

(d) 假設某項投資組合裡面，台灣和香港各佔 15%，東京佔 70%。請計算該投資組合在 1994 年的報酬率，並計算報酬率標準差。

2. 假設投資人同時持有兩種股票，持有股數分別是 $N_1$ 與 $N_2$。投資組合及兩種資產的報酬率分別以 $r_P$、$r_1$ 及 $r_2$。

(a) 請說明為何 $r_P = \alpha r_1 + (1-\alpha) r_2$ 會成立？並計算權數 $\alpha$。

(b) 請說明除非這兩種股票報酬率相關係數為 1，不然投資組合報酬率標準誤會小於這兩種股票報酬率標準誤的加權平均數。

3. 朱一計畫以手中現金購買 A 公司以及 B 公司股票。A 公司股票的預期報酬率為 12%，B 公司股票預期報酬率為 8%，A 公司及 B 公司股票報酬率標準誤分別為 10% 及 5%。這兩家股票報酬率相關係數為 0.2。

(a) 請算出下列三種投資組合的預期報酬率以及報酬率標準誤：

| 投資組合 | 持有 A 公司股票比重 | 持有 B 公司股票比重 $C_2$ |
|---|---|---|
| 1 | 50 | 50 |
| 2 | 25 | 75 |
| 3 | 75 | 25 |

(b) 請畫出投資組合的機會集合。

(c) 請以所畫出的投資組合機會集合說明分散持有可降低風險。

4. 林金手中現有 100 萬元現金，她計畫將其中 40 萬元投資於 A 公司股票，其於 60 萬元則投資於 B 公司股票。她將所預期的 A 公司及 B 公司報酬率 (r) 及報酬率標準誤 ($\sigma$) 列於下表：

| | A | B |
|---|---|---|
| r | 15% | 20% |
| $\sigma$ | 15% | 20% |

(a) 假設 $\sigma_{AB}$ 預估值為 -0.5，0 以及 0.5 時，請分別算出投資組合的預期報酬率以及報酬率標準誤。

(b) 請討論在這三種情形下，林金所選擇投資組合是否較將所有現金投資於A公司股票為佳？

(c) 請用 (a) 小題所得答案說明，分散持有對降低投資組合風險的效果。

5. 假設 A、B 兩家銀行放款餘額均為 4000 億元，其中兩家銀行各有 500 億元將於明日到期。銀行A到期的放款件數有 100 件，每件金額均為 5 億，違約機率均為 5%，且每件違約發生的機率相互獨立。銀行 B 到期的 500 億元，則屬於同放一款案件，違約機率亦為 5%，發生違約後，銀行 A 及銀行 B 均無法收回本息。請問銀行 A 與銀行 B 所面對的風險有何不同？哪間銀行面對的風險較小？

6. 假設朱一為厭惡風險的市場投資者，目前正考慮到A國及B國進行股票投資。假設這兩個國家證交所中所有交易的股票預期報酬率及報酬率變異數完全相同。但A國所有交易股票報酬率變動方向一致，而B國個別股票報酬率間變動方向則相互獨立。請問朱一應選擇到哪一個國家投資？