2015/10/29 個體經濟、產業組織與貿易專題討論導讀

Tsay and Yeh, “The Egalitarian solution vs. the nucleolus: a strategic comparison”

經濟四 林伯軒 B01302126

1. What is the question?

在合作賽局中，Transferable Utility(TU) Games 是其中非常重要的一類。在 TU games 中，什麼才是這個賽局的「解」，其實有很多種定義方法。其中最大的兩類莫過於 the nucleolus（核心解）與 the egalitarian solution（平等主義解）[1]，這兩種解在特定情況下都具有存在性與唯一性，但到目前為止，都沒有人去討論這兩種解之間的關係。因此，作者的研究問題便是：**這兩種解的關係為何？**

2. Why should we care about this?

資源分配的問題在我們的生活中比比皆是，其中最常見的情況便是「如何分攤成本」。舉例來說，你住在一個 20 層樓的大樓裡，現在電梯壞了，住戶必須一起分攤電梯維修費。最簡單的分法可能是這些住戶平均分攤，然而，這時住在 2 樓的住戶可能會氣的跳腳，因為他居然要付跟住 20 樓的人一樣的錢，似乎不太公平。為了解決這類問題，「解」的觀念至關重要，而了解不同的「解」之間觀念的差異自然也很重要。

3. What is the author’s answer?

在這篇文章中，作者構造了兩個 2-stage extensive form game（容後敘述）來比較 the nucleolus 和 the egalitarian solution 之間的關係。這兩個 game 的差別是在成本最大的 player（20 樓的住戶）「**角色**」的不同，作者發現：在第一個 game 中，他們沒有指定特定角色給他，則此時的 SPE 正好是 the egalitarian solution；在第二個 game 中，他擔任的角色是各個結盟（coalition）的幫助者，則此時的 SPE 就變成了 the nucleolus。

4. How did the author get there?

如上所述，作者在這篇 paper 中構造了兩個賽局以比較這兩種「解」的觀念。在第一個賽局的玩法如下。在第一個 stage 中，在所有 player 中成本最低的人（2 樓住戶）出來「揪團」(team-maker)，並且提議一個這團人的付款方案（必須要讓這些人出的錢夠支付這團人中成本最高的人的成本）。在第二個 stage 中，這團裡的人都可以決定要不要接受提議。如果接受，則這團人就依照這個方案來出電梯的修繕費，而下一回合(round)，則扣掉這些人，在剩下的人中成本最低的人再次成為揪團主。反之，如果有人反對的話，他可以提更好的提案，或者離開這一團。這邊需要注意的地方是，大家出完提議的錢後如果還不夠支付最大的成本的話，**剩下的錢由 team-maker 來支付**。作者在此證明，這個賽局的解正是 the egalitarian solution。

為了比較這兩種解的觀念，作者在構造第二個賽局時利用 the nucleolus 的性質”last agent cost additivity”[2]。為了把這個特性捕捉進來，作者將上述賽局進行微調。在每一回合開始前，成本最高的 player，被排除在可揪團的範圍之外，但他可以在組團成功之後，跳進那一組來填補這一組不夠的成本[3]，因此這個成員的「**角色**」被稱為「幫助者」(helper)。作者也證明了，這個解就是 the nucleolus solution。由此可見，這兩個解的差異或許就是來自對於成員的「角色」安排的不同。

---

[1] The nucleolus 的先驅研究是 Schmeider(1969)，而 the egalitarian solution 則是 Dutta & Ray (1989)。對這兩篇研究如果有基本認識，會比較容易進入狀況。因此我在 Technical Appendix (|)(||)分別摘要了兩篇文章。

[2] 在 the nucleolus 解的觀念下，如果成本最高的成員（20 樓住戶）如果成本增加，則這個錢必須全部由他負擔，跟低樓層的住戶完全沒有關係。這個性質在 the egalitarian solution 的概念下並不成立。

[3] 因為住 20 樓的住獨自修繕電梯的成本很高，因此這些成本很高的成員有很強的動機要加入這些以成形的團，找人來分攤成本。跟第一個 game 相比，最後的成本不再是由揪團主分擔，而是由這個成本最高的人分擔。

Technical Appendix (I): Nucleolus Solution (核心解)

— Highlight of Schmeidler (1969), "The Nucleolus of a Characteristic Function Game"

1. What is a "characteristic function game"?

特徵函數賽局是合作賽局中的一種型式，是由"參與人數的集合 N"，和"如何決定各種結盟 (coalition) 的函數 v"所決定。N 是所有參與者的集合，如果有 n 個人，則 $N=\{1,2,\cdots,n\}$。$S\subseteq N$，S 是 N 的一個子集合，也就是 N 中的某種結盟方式。$v: S\longmapsto v(S)$，$v(S)\in\mathbb{R}$，$v(\cdot)$ 是每個結盟可得報酬的函數。每個賽局的結果 (outcome) 是一個 n 維的報酬向量 (也就是 n 個人報酬)。$x\in\mathbb{R}^n$，$x=(x_1,\cdots,x_n)$ 是一個結果，且定義 $x(S)=\sum_{i\in S}x_i$，即這個結盟的總報酬。最後，我們定義 X 是所有報酬向量的集合。

應該得到 v，卻只得到 x，這個差就是應賺卻沒賺到的

2. 兩個報酬向量 x, y，哪個比較好？

$v(S)$ 是這個結盟的價值，$x(S)$ 是這個結盟所得的報酬，所以，如果用白話文說，$v(S)-x(S)$ 就是結盟的"悲劇程度"。我們現在考慮 N 的冪集合 (power set)，也就是所有 N 的子集合。我們認為，y 這個報酬比 x 好，如果 $\max\{v(S)-y(S)\mid S\subseteq N\} < \max\{v(S)-x(S)\mid S\subseteq N\}$ (意即如果用 y，則最悲劇的結盟 S 的悲劇程度比用 x 的小，則 y 比 x 好。(這裡的概念很像 John Rawls 的想法：把最慘的人的效用極大)

3. 核心解 (Nucleolus Solution)

給定賽局 $[N,v]$，固定任何一個結果 $x\in\mathbb{R}^n$，$\theta(x)\in\mathbb{R}^{2^n}$，$\theta(x)$ 是把每個結盟的悲劇程度 $v(S)-x(S)$ 收集起來的向量，因為所有子集的數目是 2^n 個，所以 $\theta(x)$ 是在 2^n 維中的向量。$\theta^i(x)$ 代表 $\theta(x)$ 向量的第 i 個 element。在定義 θ 時，我們讓 $v(S)-x(S)$ 依大到小排入 $\theta(x)$ 的 2^n 維中。所以，如果 $i<j$，則 $\theta^i(x)\geq\theta^j(x)$。因此，如果 x 比 y 更好，則 $\theta(x)<\theta(y)$ (所有的維度 $\theta(x)$ 都不超過 $\theta^i(y)$，且存在維度 k s.t. $\theta^k(x)<\theta^k(y)$)。而核心解的意思是指：考慮 X，$N(X):=\{x\in X\mid \theta(x)\preceq\theta(x')\ \forall x'\in X\}$，也就是說，把所有最悲劇的結盟的悲慘程度極小化後的結果，就是核心解。

No.
Date

4. 核心解的良好性質：

會發展出核心解的觀念，正是因為我們原有的預測都不夠好，像 barganing set $\mathcal{M}$ 和 kernel set $\mathcal{K}$。而這個核心解 N，其實是 $\mathcal{M}$ 和 N 的精簡集 (refinement)，即：$N \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$。另一個良好性質就是核心解的唯一性，在 Schmeidler (1969) 這篇中，作者證明了，如果 X 是 non-empty，compact 且 convex 的集合（在 $\mathbb{R}^n$），則存在唯一核心解！

#

Technical Appendix (II)：Egalitarian Solution（平等主義解）：

— Highlight of Dutta and Ray (1989), "A concept of Egalitarian Under Participation Constraints"

1. Egalitarian Solution 的精神

平等主義解的精神和核心解的想法很接近，卻又有略有不同之處。核心解是想把最悲劇的結盟的悲慘程度極小化；而平等主義解則是看整個報酬分配的公平性（可以想成要把分配的 variance 極小）。因此，在考慮兩個報酬向量 x，y 時，我們在這個時候會比較喜歡分配比較平均的那個向量。用數學語言來說，$x=(x_1,\ldots,x_n)$，$y=(y_1,\ldots,y_n)$ 是 n 個人的報酬。進行重排，得到 $\hat{x}=(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n)$，$\hat{y}=(\hat{y}_1,\ldots,\hat{y}_n)$ with $\hat{x}_1\ge\hat{x}_2\ge\cdots\ge\hat{x}_n$，$\hat{y}_1\ge\hat{y}_2\ge\cdots\ge\hat{y}_n$，即：將大家的報酬由大而小排。$y>x$ if $\sum_{i=1}^{k}\hat{x}_i\ge\sum_{i=1}^{k}\hat{y}_i$ $\forall k$，則 y 是比較好的報酬，稱為 Lorenz Dominance。

2. Some Notations：

首先是一些符號：$N=\{1,2,\ldots,n\}$ 是一個 players 的集合。$S\subsetneq N$ 是 N 的子集，稱為一個結盟 (coalition)。$A\subsetneq S\subsetneq N$，則 A 是 S 的子結盟 (sub-coalition)。如果所有人在一個結盟裡，則稱為"大聯盟"(grand coalition)。V：value function，$v: S\mapsto v(S)$，$v(S)\in\mathbb{R}$，x 是一個 feasible payoff vector，則 $\sum_{i\in S}x_i\le v(S)$，即：S 這個結盟最多只有 $v(S)$，如果大家的 payoff 和比 $v(S)$ 還大，就行不通了。為了方便，我們定義一個 payoff vector 的"restriction"：考慮 $T\subsetneq N$，我們定義 $x|_T=(x_i)_{i\in T}\in\mathbb{R}^{|T|}$，也就是 $x|_T$ 是 T 結盟裡的人的人的報酬向量。

Chuyu culture

3. Lorenz mapping and Egalitarian Allocation

在有了以上的符號後，我們就可以討論平等主義解的構造了。首先是看一個 mapping（Lorenz mapping），這個 mapping 是集合之對應關係，稱之為 E。考慮集合 $A \subset \mathbb{R}^n$，是 payoff vector 的集合。

$EA = \{x \in A \mid \nexists\, y \in A$ such that $\sum_{i=1}^{k} \hat{y}_i \le \sum_{i=1}^{k} \hat{x}_i \ \forall k$ with strictly inequality for some $k\}$

這個集合所收集的東西，就是 A 集合裡最公平的報酬向量（如果 A 是 closed set，則 EA 非空）。

接下來，我們再考慮 Lorenz core，S 這個結盟的 Lorenz core $L(S)$ 為：

$L(S) = \{x \in \mathbb{R}^{|S|} \mid x$ is feasible, and $\nexists\, T \subseteq S$ and $y \in EL(T)$ st. $y > x|_T\}$

由此構造可知，$L(S)$ 所收集的報酬向量，是可以讓結盟情狀穩定的向量，因為在構造時，便考慮了 S 的所有子結盟 T。有了這兩個東西後，我們把 E 作用在 $L(S)$ 上，得到 $EL(S)$ 便是穩定向量中最公平的報酬。而這個也就是所謂的平等主義解。

4. 良好性質：

平等主義解就像核心解一樣具有"唯一性"。在 Dutta and Ray (1989) 中，他們證明了在 convex game（T, S 兩結盟，$v(T)+v(S) \le v(T\cup S)+v(T\cap S)$）中，存在唯一的平等主義分配。

#